# La thermique du logement, d'A(ristote) à Z(eldovitch)

**Conduction** ..... **2**
**Convection** ..... **17**
**Rayonnement** ..... **40**
**Combustion** ..... **57**
**Connexion** ..... **68**
**Précision** ..... **71**

## Conduction…

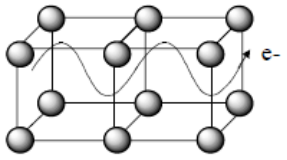
« Si par exemple le mouvement et la position de toutes les molécules d'un gaz étaient connus, parler de la température de ce gaz n'aurait plus de signification. Le concept de température ne peut être utilisé que si un système est insuffisamment connu et que l'on désire tirer des conclusions statistiques de cette connaissance incomplète » (**W. Heisenberg**, The physicist's conception of nature, 1958).

Les mécaniques, classique ou quantique, avec leurs lois fondamentales, invariantes par renversement du temps, déterminent le comportement des particules isolées ou en petit nombre. Aux échelles humaines, la matière est toutefois constituée d'un nombre gigantesque de particules.

Comment dégager des lois de comportement des gaz, des liquides et des solides à partir des lois fondamentales ?

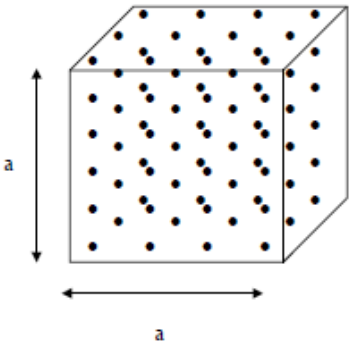
L'irréversibilité de la plupart des mécanismes macroscopiques suffit à prouver que les lois fondamentales ne peuvent traverser la gamme des échelles sans un profond réaménagement. Le sillage dans l'image de gauche implique un écoulement du fluide vers la droite. Un écoulement vers la gauche est contre nature. Le pendule à droite, dont l'animation peut être inversée sans perte de réalisme si elle est de courte durée, est une exception qui confirme la règle.

A l'échelle des atomes et des molécules individuelles, on sait que les bonnes lois fondamentales sont plutôt celles de la mécanique quantique. Pour les particules élémentaires qu'on appelle des fermions (électrons, protons, neutrons,…) il existe des cas limites où l'état du « gaz » de fermions est totalement déterminé. Le gaz des électrons libres de Fermi, à savoir les électrons de valence d'un conducteur métallique responsables des courants électriques dans ce conducteur, fournit un exemple.




Électron de masse m dans un volume d'arête a

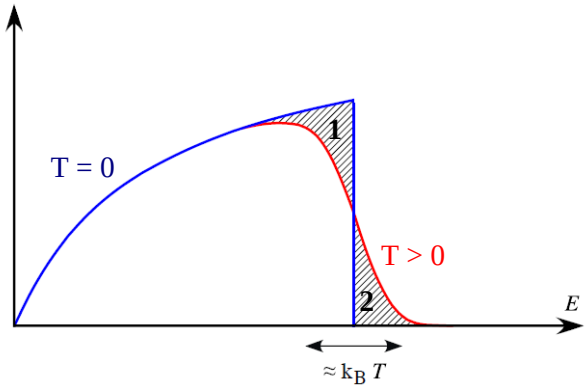
$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\frac{\hbar^2}{8ma^2}$$



Un centimètre cube de cuivre contient N = 8.45 $10^{22}$ électrons libres, à peu près autant que d'étoiles dans l'univers. Au « zéro absolu », la nature choisit de placer deux électrons sur chaque mode cinétique permis par la mécanique quantique [(1)], dans un ordre croissant d'énergie.

Quand les 8.45 $10^{22}$ électrons ont tous trouvé leur mode, l'énergie cinétique des derniers placés est l'énergie de Fermi $E_F$ de 7 eV. L'énergie cinétique totale des électrons du cube de cuivre au zéro absolu est exactement 35 $10^{22}$ eV (56 kJ).

La mécanique quantique n'interdit pas un monde totalement ordonné, figé pour l'éternité dans un état d'énergie minimum, quelque chose comme la Forteresse de la Solitude de Superman. L'univers réel est heureusement plus animé et baigné de rayonnement électromagnétique. Du coup les électrons libres de notre cube de cuivre prennent du tonus et se distribuent sur nettement plus que 0.5 N modes cinétiques. Des modes plus énergétiques (région 2 de l'image ci-dessous), vides au zéro absolu, sont occupés. D'autres, qui étaient remplis au zéro absolu, sont désormais vides (région 1 de l'image).




Cette migration ne se fait pas au hasard. Dans une situation qualifiée d'équilibre thermodynamique « à la température T plus grande que zéro », on ne sait plus dire quel est le mode cinétique de chacun des 8.45 $10^{22}$ électrons, mais pour chaque mode cinétique, on sait dire son taux d'occupation moyen (distribution statistique de **Fermi-Dirac**).

$$\langle N(\mathbf{n})\rangle = 1/(\exp((E(\mathbf{n}) - \mu)/k_B T) + 1)$$

$k_B$ = 1.38 $10^{-23}$ J/K, constante de **Boltzmann**

**n** indice composite d'un mode

Comme les modes cinétiques sont en nombre infini, la distribution est une suite infinie de valeurs plus petites que un et la somme des valeurs converge vers N = 8.45 $10^{22}$, le nombre total d'électrons…qui n'a pas changé.

$$\sum\langle N_{\mathbf{n}}\rangle = N$$

Une autre série converge, celle des énergies moyennes par mode. L'énergie totale, supérieure à 56kJ, n'est plus figée comme au zéro absolu et peut fluctuer. On démontre néanmoins que pour des nombres de particules aussi élevés que 8.45 $10^{22}$ la variation relative de l'énergie totale à l'équilibre thermique est dérisoire.

$$\sum\langle N_{\mathbf{n}}\rangle E_{\mathbf{n}} = \langle E\rangle$$

Cette introduction suscite au moins trois interrogations.

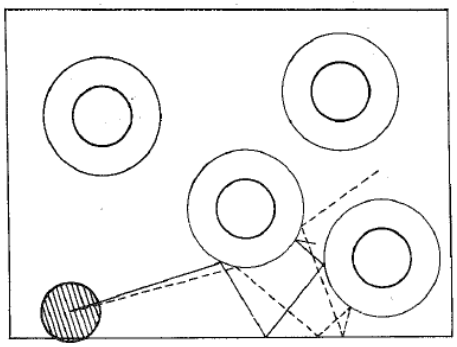
1. *Le passage aux statistiques est-il obligatoire quand on passe de l'échelle de l'électron à l'échelle du centimètre cube de cuivre ?*
2. *D'où diable peut bien sortir une formule aussi ésotérique que celle de la distribution de Fermi-Dirac ? Qu'est-ce que la conductibilité électrique a en commun avec la température du métal ?*
3. *Quelle est la portée pratique de l'équilibre thermique ? Comment se comportent les systèmes hors d'équilibre ?*

*Le passage aux statistiques est-il obligatoire quand on passe de l'échelle de l'électron à l'échelle du centimètre cube de cuivre ?*

Pour répondre, la tradition vulgarisatrice consiste à évoquer $8.45\ 10^{22}$ boules de billard sur un tapis gigantesque. En théorie, si on connaît la position et la vitesse de chaque boule à l'instant zéro, les lois de la mécanique newtonienne permettent de calculer les deux grandeurs à tout instant ultérieur.

Le premier obstacle est anthropique. Il n'existe pas de calculateur pour calculer $8.45\ 10^{22}$ trajectoires simultanément dans un temps compatible avec la longévité des cerveaux humains.

On emprunte l'explication du deuxième obstacle à **David Ruelle** (Hasard et Chaos, 1991). Imaginons plutôt un billard électrique ou « flipper » (image ci-dessous). Un tout petit écart angulaire entre deux trajectoires initiales de la boule suffit à découpler totalement les trajectoires après un nombre dérisoire de collisions de la boule avec les plots et les bandes.



De même, la plus petite erreur sur les vitesses des $8.45\ 10^{22}$ boules à l'instant zéro donne presque instantanément deux entrelacs de trajectoires sans superposition aucune. David Ruelle appelle ça « dépendance sensitive des conditions initiales ». Des considérations purement géométriques sont donc susceptibles d'amener rapidement un système déterministe dans un état totalement chaotique.

Incidemment, « gaz » serait le mot grec « chaos » prononcé par le chimiste flamand **Van Helmont (1579-1644)**.

Si les faces des cristallites de cuivre jouent le rôle des bandes de billard, qu'est ce qui joue le rôle des plots sur le trajet des électrons de Fermi ? On a longtemps cru que c'était les atomes de cuivre eux-mêmes. On sait depuis les années 1950 que ce sont plutôt les vibrations d'ensemble du réseau des atomes, assimilables à des pseudo-particules baptisées phonons. Les phonons, en perturbant la propagation des électrons, sont responsables de l'effet **Joule (1818 – 1889)**. Quoi qu'il en soit, la mathématique de ces interactions sophistiquées conduit invariablement à une dépendance sensitive des conditions initiales.

La mécanique quantique fixe l'organisation et les valeurs d'énergie des modes cinétiques (et autres) d'un gaz de particules. Des obstacles anthropiques et la dépendance sensitive des conditions initiales (due à certaines interactions) interdisent toutefois de calculer à tout instant dans quel mode précis se trouve une particule précise. La physique statistique est un complément théorique qui permet néanmoins de calculer des valeurs moyennes et de justifier les formules déterministes de la thermodynamique.

*D'où diable peut bien sortir une formule aussi ésotérique que celle de la distribution de Fermi-Dirac ? Qu'est-ce que la conductibilité électrique a en commun avec la température du métal ?*

Le physicien américain **Gibbs (1839-1903)** a, le premier, imaginé de faire un nombre arbitrairement grand de copies mentales d'un même système physico-chimique comme notre cube de cuivre conducteur à la température T de l'air ambiant. C'est une astuce pour appliquer la théorie des probabilités au gaz des $8.45\ 10^{22}$ électrons.

Cette astuce posée, la physique statistique postule l'existence universelle d'un opérateur densité de probabilité $\rho$ permettant de calculer des moyennes $<G>$ sur un ensemble de Gibbs suivant la formule quantique ci-dessous [(2)].

$$<G> = Tr\ \rho\ G$$

Ainsi, l'énergie des électrons du cube de cuivre est $<H_e> = Tr\ \rho\ H_e$ avec $H_e$ opérateur énergie (électronique) de **Hamilton (1805-1865)**.

Sait-on exprimer l'opérateur $\rho$ en toutes circonstances ?

En général non. On ne sait le faire que dans des situations bien particulières d'équilibre, analogues aux équilibres de forces de la mécanique statique.

Tous les systèmes en équilibre thermique avec un système géant baptisé thermostat forment une classe d'équivalence caractérisée par un nombre positif $\beta$ (dimension inverse d'une énergie) et ont un opérateur densité déterminé [(3)].

$$\rho = \exp(-\beta H)/Z$$

A en juger par le nombre d'exposés pathétiquement incompréhensibles sur le sujet, la justification de cette formule de Gibbs est forcément compliquée [(4)].

On sait donc exprimer l'énergie d'équilibre $U_e$ des électrons libres du centimètre cube de cuivre à l'ambiance en fonction de $\beta$.

$$U_e = Tr\ H_e \exp(-\beta H_e)/\ Tr \exp(-\beta H_e)$$

La formule ci-dessus paraît nettement moins pratique que la formule $\sum<N_n> E_n = <E>$ proposée antérieurement avec la distribution de Fermi-Dirac. Sauf que ce sont les mêmes [(5)]…

Les techniques pour étudier le gaz des électrons libres du cristal de cuivre sont transposables aux vibrations mécaniques du cristal. Le formalisme mathématique conduit à décrire le concert des modes de vibration acoustique du réseau cristallin comme un gaz de pseudo particules, les phonons. La distribution statistique des phonons à l'équilibre thermique n'est pas celle de Fermi-Dirac mais celle de **Bose-Einstein**. On sait néanmoins calculer une énergie de vibration $U_v$, fonction miraculeusement simple du paramètre β.

$$U_v = 3N/\beta + Cte$$

N nombre d'atomes vibrants

Les chaleurs massiques des solides [6] et des liquides sont étudiées avec des calorimètres, appareils mis au point par les chercheurs au XIXe siècle. En **1819**, **Dulong** et **Petit** découvrent que la chaleur massique $c_p$ de la plupart des éléments chimiques solides est, à l'ambiance, indépendante de la température et inversement proportionnelle à la masse molaire de l'élément.

Ce résultat est inscrit dans la formule théorique de $U_v$ à condition de poser $\beta = 1/k_BT$, avec $k_B$ constante de **Boltzmann (1844-1906)**. On établit ainsi la relation entre température et agitation des atomes, relation qui fait désormais partie des représentations mentales de l'ingénieur.

Il faut conduire des mesures calorimétriques très minutieuses, à basse température, pour détecter l'influence des électrons de conduction sur la chaleur massique du cuivre. On découvre néanmoins que c'est strictement le même coefficient $\beta = 1/k_BT$ qui gouverne cette influence.

On peut donc affirmer que deux gaz (un peu exotiques), un gaz de phonons et un gaz d'électrons, cohabitent à l'intérieur du cube de cuivre et que le gaz de phonons joue le rôle de thermostat pour le gaz d'électrons. Cet équilibrage est rendu possible par une influence du réseau cristallin et de ses déformations sur les électrons (pas tout à fait libres). L'opérateur énergie du cube de cuivre est la somme d'au moins trois contributions [7]. Le troisième terme en plus de l'énergie des électrons et de celle des phonons est une perturbation due aux « collisions » entre électrons et phonons. Ces collisions expliquent en outre la résistance électrique et l'effet joule.

Rien dans la nature, aucune matière, aucun rayonnement, ne peut échapper indéfiniment à la « thermalisation » par contact avec un thermostat parce que les collisions, même entre particules les plus improbables, sont universelles. Pour un solide comme le cuivre, on résume le tout dans la définition de la chaleur massique $c_p$ qu'on mesure en Joules par kilogramme et par degré.

$$dU = m\, c_p\, dT$$

L'expression « à l'ambiance » signifie en général que le cube de cuivre est aussi en équilibre thermique avec l'air de la pièce. Les molécules d'azote $N_2$ et les molécules d'oxygène $O_2$ sont aussi dans des modes cinétiques dont l'organisation quantique rappelle furieusement celle des électrons de Fermi dès lors qu'on imagine la masse d'air confinée entre les parois du laboratoire [8].

Les deux statistiques déjà rencontrées s'appliquent, mais, pour les molécules de gaz à l'ambiance, les formules fusionnent et on ne parle plus ni de bosons ni de fermions mais de boltzmanions. Quand on conduit tous les calculs en imaginant que les molécules de gaz n'interagissent qu'avec les parois solides et s'ignorent mutuellement, on retrouve des formules simples pour les énergies cinétiques (translation et rotation autour des axes N-N et O-O pour les molécules diatomiques).

$$U = (5/2)N/\beta + Cte$$

N nombre de molécules diatomiques

Quand on rapproche cette formule de l'expression classique de l'énergie interne des gaz parfaits diatomiques [9], on établit une fois de plus la correspondance entre le multiplicateur statistique β et la température absolue T. La loi de **Mariotte (1620–1684)** joue pour les gaz le rôle de la loi de **Dulong** et **Petit** pour les solides.

Néanmoins, même dans l'air on trouve des forces de **Van der Waals (1837-1923)** faibles qui invalident le modèle des gaz parfaits et font dépendre l'énergie totale des distances entre molécules et donc du volume. On retient donc la formule majeure de la thermostatique des gaz réels [10].

$$dU = C_v\, dT + (l-p)\, dV$$

$C_v$ chaleur spécifique à volume constant
l chaleur latente de dilatation
p pression statique

A y regarder de près, cette formule manque cruellement de symétrie. Avec quelques antécédents en thermomécanique on reconnaît dans le terme –p dV un travail mécanique w reçu lors d'une compression ou d'une expansion infinitésimale.

**Clausius (1822-1888)** isole le solde $C_v\, dT + l\, dV$ comme une quantité de chaleur q reçue lors du même type de transformation. Il est toutefois choqué par le manque de sobriété de la formule et par le choix de la température, une grandeur intensive [11], comme élément différentiel pour calculer q.

Clausius va au plus simple et postule l'existence de l'entropie, une variable extensive S définie par une formule évidemment calquée sur w = -p dV pour une transformation infinitésimale.

$$q = T\, dS$$

Les scientifiques du XIXe siècle ne se sentent à l'aise qu'avec des fonctions d'état, fonctions continues et dérivables de grandeurs extensives et/ou intensives. Pourtant, aucune transformation physicochimique réelle n'est correctement décrite par ces fonctions car la dérivabilité totale exacte implique la réversibilité de la transformation.

L'entropie de Clausius est une fonction d'état. La thermodynamique classique le démontre à coup de cycles réversibles de **Carnot (1796-1832)** [12]. Les explications thermomécaniques sont toujours alambiquées alors que la logique qui part de la formule de Gibbs coule de source.

Dans un univers quasi statique la reine des fonctions d'état n'est d'ailleurs ni l'énergie interne ni l'entropie, c'est la fonction de partition Z [3][13] ou plus précisément l'énergie libre [14] de **Helmholtz (1821-1894)**, qui gouverne toutes les autres fonctions.

$$F = - k_B T \, \mathrm{Log} Z$$

Pourquoi la formule de Gibbs (ou celle de Helmholtz ci-dessus) n'a-t-elle pas le même retentissement que le $\mathbf{f} = m\boldsymbol{\gamma}$ de la deuxième loi de **Newton (1642-1727)** ou que l'équation d'évolution de **Schrödinger (1887-1961)** en mécanique quantique ?

C'est parce que la formule de Gibbs ne dit rien sur l'évolution des systèmes réels. Clausius pressent que son entropie doit combler cette lacune. La masse, le volume, l'énergie [15] d'un système thermomécanique sont des paramètres extensifs, entités palpables et/ou connues sans ambiguïté au cours de toute évolution, même irréversible. Il doit en être de même pour l'entropie.

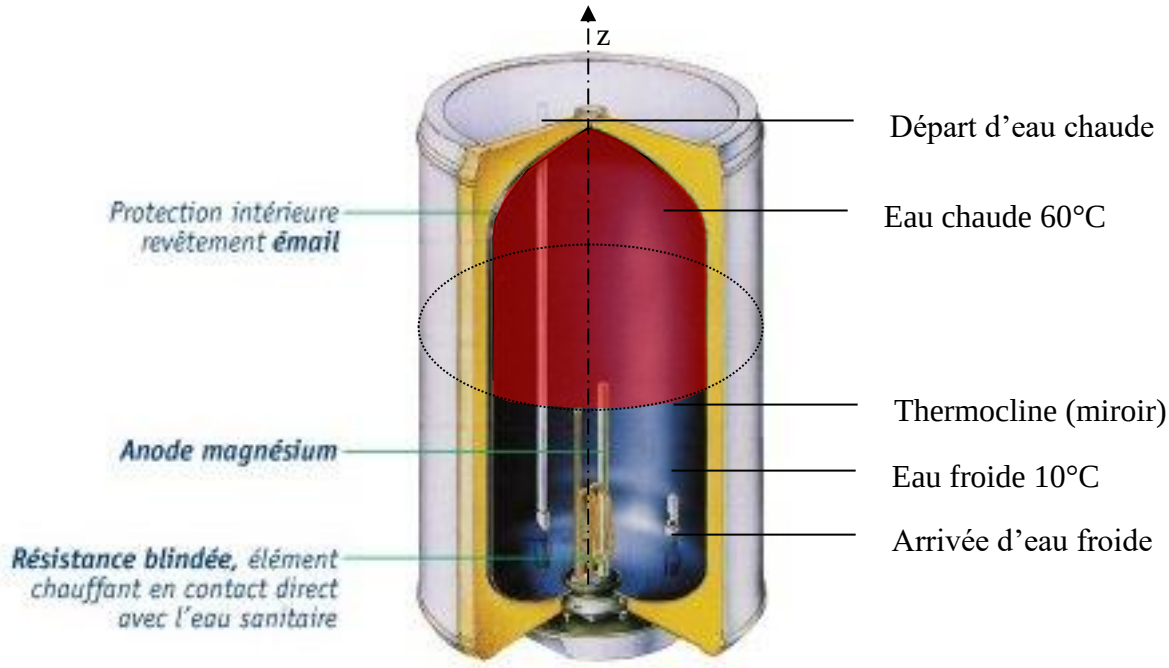
Appréhender l'entropie hors d'équilibre n'est toutefois pas chose facile. Les irréversibilités qu'on cherche à comprendre sont dues à des phénomènes dissipatifs comme les frottements visqueux et la diffusion de chaleur. Or ces phénomènes interviennent à des échelles hors de portée de nos sens. La (dé)stratification du ballon d'eau chaude sanitaire ci-dessous clarifie un peu les choses.

Incidemment, la chaleur massique exceptionnelle de l'eau (4180 $J.kg^{-1}.K^{-1}$) est encore plus compliquée à expliquer que celle du cuivre ou de l'air. On invoque un réseau flexible de molécules $H_2O$ liées par une liaison chimique un peu spéciale, la liaison hydrogène.

*Quelle est la portée pratique de l'équilibre thermique ? Comment se comportent les systèmes hors d'équilibre ?*

L'eau froide à 10°C arrive par le bas du ballon au fur et à mesure que l'eau chaude à 60°C est soutirée en haut du ballon. L'eau froide pèse 1.7% de plus que l'eau chaude et ne se mélange pas. On arrête le soutirage quand l'eau froide arrive à mi-hauteur.

Si l'isolation du ballon rend les pertes thermiques négligeables, on peut dire que le volume et l'énergie de la masse d'eau sont fixes. Aucune fonction de ces deux paramètres ne peut donc rendre compte de ce que tout le monde devine, à savoir que toute l'eau du ballon devient tiède, après plusieurs heures.




L'entropie, c'est la quantité qui varie pendant le mélange thermique et on convient qu'elle augmente puis se stabilise à son maximum, quand la température de la masse d'eau est homogène, à 35°C.

Pendant le mélange, la température du ballon n'existe pas. Où la mesurer ? L'entropie du ballon, elle, existe toujours et c'est d'ailleurs la somme de l'entropie du haut et de l'entropie du bas.

Historiquement, la compréhension de l'entropie hors d'équilibre progresse exactement comme la compréhension de la structure atomique de la matière. Sautons directement à la définition de **John von Neumann (1903-1957)** qui fait intervenir l'opérateur densité de probabilité ρ déjà rencontré.

$$S = - k_B \, Tr \, \rho Log \, \rho$$

Cette définition [16] permet d'établir la formule de Gibbs comme solution d'un problème de maximisation sous contrainte [17], ce que les mathématiciens adorent. Saluons tout de même le sens de l'autodérision de Von Neumann qui donne le conseil suivant à un confrère.

« No one knows what entropy really is, so in a debate, if you use the term entropy, you will always have an advantage ».

L'entropie statistique de Von Neumann assure l'existence et l'autonomie de la grandeur extensive souhaitée par Clausius. En revanche elle n'a pas de portée opérationnelle pour les systèmes thermodynamiques classiques, même aussi élémentaires que le ballon à fabriquer l'eau tiède.

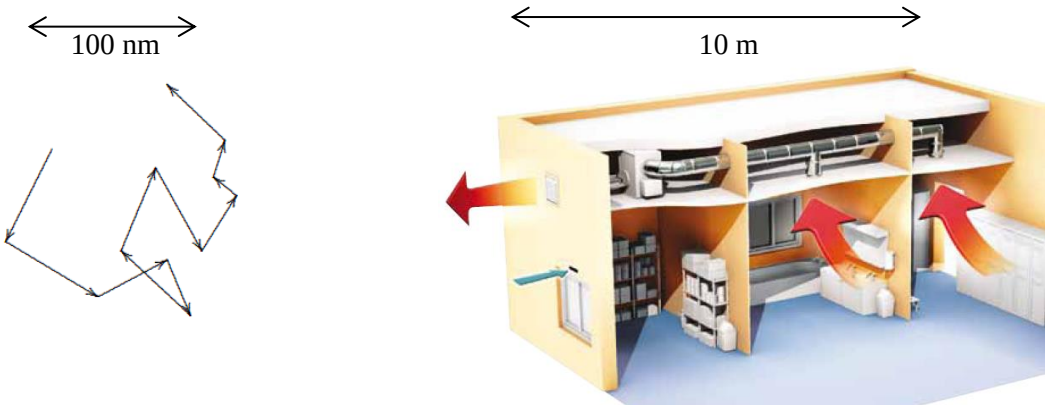
Les solutions pour les ingénieurs, codes numériques en particulier, forment une branche récente de la thermodynamique, la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI). **Duhem (1861-1916)** en est le pionnier, suivi d'**Onsager (1903-1976)** et **Prigogine (1917-2003)** pour citer les plus célèbres.

La TPI postule qu'il existe une échelle hydrodynamique [18], comprise entre l'échelle de la molécule et l'échelle de la turbine, où tout élément de matière est continu et en équilibre thermique local avec son environnement.

La TPI n'a aucun besoin de physique statistique pour dérouler ses équations de champs. C'est néanmoins la physique statistique, la cinétique des gaz en particulier, qui fournit les justifications les plus convaincantes des axiomes de la TPI. Pour les gaz raréfiés plus précisément, l'équation de transport de Boltzmann permet de retrouver toute la thermodynamique, jusqu'à la « preuve » du deuxième principe [19].

S'il est concevable que les molécules d'eau $H_2O$, collées les unes aux autres par la puissante liaison hydrogène, forment un continuum quand on les prend par milliards, il est plus dur de l'admettre pour les molécules d'air, $N_2$ et $O_2$ qui filent à 400 m/s en mode balistique à l'ambiance. Or la TPI s'applique aussi à l'aéraulique.

Les collisions de boules de billard sont encore une fois mises à contribution. Un modèle stochastique de « marche au hasard » allié à un modèle de collision dit « de section efficace » confère aux molécules de gaz des trajectoires « d'ivrognes » qui n'ont plus rien à voir avec le mode balistique.



Le calcul montre que deux molécules d'azote ou d'oxygène adjacentes subissent chacune une dizaine de milliards de collisions en parcourant 10 m de la gaine de ventilation ci-dessus (vitesse de l'air dans la gaine à 10m/s). Pour autant, au bout des 10m, elles ne sont pas éloignées de plus de quelques millimètres l'une de l'autre et sont restées dans la même « veine » d'air. C'est cette cohésion cinématique qui justifie l'approximation du milieu continu. Des théories dites mésoscopiques justifient en outre l'approximation de l'équilibre thermique local.

Pendant l'excursion d'un domaine hydrodynamique (1 $mm^3$ air ou 3 $10^{16}$ molécules par exemple) dans la gaine de ventilation, pas mal de molécules traversent la frontière virtuelle de l'élément dans les deux sens. Même si le solde d'échange de masse est nul, toute grandeur extensive G portée par les molécules peut donner lieu à un micro-courant (densité de courant) $\mathbf{J_G}$ à travers la frontière. La marche aléatoire des molécules est responsable des micro-courants de diffusion décrits par la formule (20) de **Fick (1829-1901)**.

$$\mathbf{J_G} = - K \nabla g$$

Quand la grandeur extensive G est l'énergie cinétique moléculaire sous toutes ses formes (translation, rotation, vibration…), le micro-courant $\mathbf{J_Q}$ est un micro-courant de chaleur proportionnel au gradient (noté $\nabla$) d'énergie cinétique par unité de volume. Or, localement, l'énergie cinétique interne est proportionnelle à la température. Pour la diffusion de chaleur, la formule de Fick s'appelle la loi de **Fourier (1768 – 1830)**.

$$\mathbf{J_Q} = - \lambda \nabla T$$

La conductivité thermique $\lambda$ se mesure en watts par mètre et par degré.

Fort bien pour les gaz moléculaires. Mais si la conductibilité thermique implique des « porteurs de chaleur », que sont les porteurs de chaleurs dans notre cube de cuivre ou dans l'eau du ballon ? Ni le cuivre, ni l'eau ne sont connus pour être des isolants thermiques.

Pour les métaux conducteurs de l'électricité, les électrons libres sont aussi porteurs de chaleur. Pour les isolants électriques, les phonons responsables de la chaleur spécifique sont aussi des porteurs de chaleur. Que des vibrations arrivent à s'entrechoquer et à se retrouver avec un libre parcours moyen est un miracle élucidé de la physique moderne. Les liquides quant à eux gardent encore une grande partie de leur mystère.

Le tableau ci-dessous (règles Th-U matériaux) indique des valeurs de chaleur massique et de conductivité thermique pour quelques matériaux utiles à l'ingénieur. On note la gamme très large des conductivités au repos due à la diversité des porteurs de chaleur.

| Composé | Phase | $c_p$ ($J.Kg^{-1}.K^{-1}$) | $\lambda$ ($W.m^{-1}.K^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| Air | gaz | 1008 | 0.025 (au repos) |
| Eau | Liquide (10°C) | 4190 | 0.60 (au repos) |
| Polystyrène (expansé) | solide amorphe et organique | 1450 | ≅ 0.04 |
| Verre (sodo-calcaire) | solide amorphe et inorganique | 750 | 1 |
| Béton (plein) | polycristal | 1000 | ≅ 2 |
| Fer | solide | 450 | 50 |
| Aluminium | solide | 880 | 230 |
| Cuivre | solide | 380 | 380 |

L'ingénieur intéressé par la puissance thermique, est naturellement séduit par des matériaux comme le cuivre et l'aluminium qui conduisent la chaleur aussi bien qu'ils la stockent. L'eau et même l'air réservent cependant une divine surprise, la convection, qui permet d'acheminer beaucoup plus de chaleur par les courants de transport que par les micro-courants de diffusion.

La TPI a besoin de la mécanique des fluides et des bilans de masse et de quantité de mouvement pour englober la convection. La TPI apporte en propre deux bilans supplémentaires, le bilan d'énergie interne et le bilan d'entropie.

En combinant ces deux derniers bilans, on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem [21], dont l'écriture est compliquée mais dont l'interprétation est simple. Les gradients de température et de vitesse de transport dans un milieu continu en mouvement sont voués à disparaître s'ils ne sont pas entretenus.

Après thermalisation, la température du milieu est uniforme et le fluide est au repos. L'entropie est alors à son maximum.

Deux paramètres caractéristiques permettent de convertir les gradients de température et de vitesse en puissance dissipée par unité de volume, la conductivité thermique $\lambda$ (Watt par mètre et par degré) pour la température, et la viscosité dynamique $\mu$ (Pascal seconde) pour la vitesse. L'inégalité de Clausius-Duhem impose que les deux paramètres soient positifs.

La condition $\lambda > 0$ confirme qu'un micro-courant de chaleur pointe toujours du chaud vers le froid. La condition $\mu > 0$ confirme que la viscosité engendre toujours des pertes de charge.

Enfin, en combinant toutes les équations de champ de la TPI, on obtient un bilan de chaleur dont on donne une version valable pour les fluides visqueux newtoniens incompressibles et indilatables.

$$\rho c_p(dT/dt) = 2\mu \, ||D||^2 + \mathrm{div}(\lambda \, \nabla T) + r$$

Variation d'énergie interne

Friction

Diffusion

Rayonnement

On n'écrit ici cette équation que pour montrer qu'elle est irréversible. Si on change t en -t, le terme à gauche change de signe et pas les termes à droite. Une solution viable ne l'est que dans le sens normal du film…

On a essayé, par ces quelques commentaires, de montrer comment la physique statistique justifie la thermodynamique des processus irréversibles, l'outil scientifique de référence de l'ingénieur en génie climatique. L'esprit critique dicte toutefois une nouvelle interrogation.

*Peut-on s'en tirer à si bon compte ? Un obstacle comme la dépendance sensitive des conditions initiales de Ruelle peut-il être balayé par un simple changement d'échelle ? La nature est-elle si complaisante qu'elle accepte que le chaos moléculaire soit dompté par le « Computational Fluid Dynamics » [(22)] ?*

Le tableau ci-dessous dresse la liste de tous les champs qui entrent en jeu en thermodynamique des fluides. On ne trouve pas moins de 16 inconnues, sans compter l'entropie qui est superfétatoire dans la théorie ordinaire.

| Champ | Symbole | Nature | Unité | Nbre d'inconnues |
|---|---|---|---|---|
| Masse volumique | $\rho$ | scalaire | $kg.m^{-3}$ | 1 |
| Vitesse de transport | $\mathbf{V}$ | vecteur | $m.s^{-1}$ | 3 |
| Pression statique | p | tenseur sphérique | Pa | 1 |
| Extra contraintes | $\sigma'$ | tenseur symétrique | Pa | 6 |
| Température | T | scalaire | °K | 1 |
| Courant de chaleur | $\mathbf{J_Q}$ | vecteur | $W.m^{-2}$ | 3 |
| Energie interne | u | scalaire | $J.kg^{-1}$ | 1 |

L'aplomb avec lequel les professeurs les plus prestigieux énoncent comme une évidence qu'il faut 16 équations de champ pour que le problème soit « bien posé » démontre la force des dogmes dans l'enseignement des sciences. La preuve n'est possible qu'en « affaiblissant » le système d'équations et elle est toujours incompréhensible pour le profane. Considérons que c'est un principe de fermeture, vérifié dans la plupart des cas pratiques.

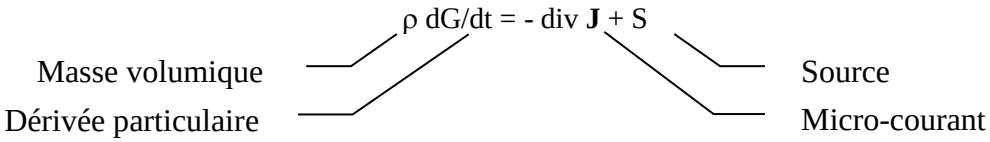
A la condition, toujours vérifiée en génie climatique, que les fluides soient visqueux, newtoniens [(23)], incompressibles et indilatables, la liste des inconnues redescend à cinq (**V**, p, T) et la fermeture est atteinte avec trois bilans.

| Bilan | Nbre d'équations | Lois appliquées au domaine hydrodynamique |
|---|---|---|
| Masse | 1 | Conservation de la masse |
| Qté de mouvement | 3 | Deuxième loi de Newton |
| Chaleur | 1 | Principes de la thermodynamique |

Les deux premiers bilans apportent les fameuses équations de **Navier (1785 – 1836)** et **Stokes (1819 – 1903)** qui sont au cœur de toute la mécanique des fluides. Le bilan de chaleur nécessite la connaissance du champ des vitesses mais les équations NS n'ont pas besoin du bilan de chaleur si on exclut la convection libre.

Incompressible, indilatable veut dire que, quoi qu'il arrive, le volume du domaine hydrodynamique se déforme mais garde la même valeur en millimètre cube. Cette contrainte doit être assouplie pour englober la convection libre. **Boussinesq (1842-1929)** réalise qu'au premier ordre, seul le poids du domaine hydrodynamique change vraiment quand le domaine se dilate à cause d'un réchauffement local. Le savant suggère donc de corriger le bilan de quantité de mouvement par une petite force d'**Archimède (287-212 av J.C.)** [(24)] s'exerçant sur le domaine hydrodynamique.

Les cinq équations de bilan s'écrivent toutes de la même façon [25].




La

| Bilan | Grandeur G | µCourant J | Source S |
|---|---|---|---|
| Masse | Volume massique | Vitesse (-) | Nulle |
| | $m^3.kg^{-1}$ | $m.s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| Qté de mouvement | Vitesse | Contraintes (tenseur) | Flottabilité |
| | $m.s^{-1}$ | Pa | $Pa.m^{-1}$ |
| Chaleur | Energie massique | Courant de chaleur | Rayonnement, dissipation visqueuse |
| | $J.kg^{-1}$ | $W.m^{-2}$ | $W.m^{-3}$ |

masse volumique s'exprime en kilogrammes par mètre cube (le symbole ρ est le même que l'opérateur quantique rencontré précédemment mais ça n'a évidemment rien à voir).

Incidemment les « bonnes » équations sont celles qu'une technique baptisée analyse inspectionnelle libère de toute unité physique. Pour un chauffe-eau par exemple, au lieu d'exprimer les longueurs en mètres, on les exprime en diamètres de cuve, au lieu d'exprimer les températures en degrés Celsius, on les exprime en différence de température standard (45°C pour le test de perte de chaleur statique).

Les équations sans dimension font surgir des nombres sans dimension qui règlent les effets d'échelle en thermodynamique des fluides. Les valeurs de certains nombres sans dimension rendent compte de bifurcations hydrauliques ou thermiques flagrantes dans la vie courante mais pas dans les équations.

Dressons le portrait de quatre nombres très courants en hydraulique et thermique de l'ingénieur.

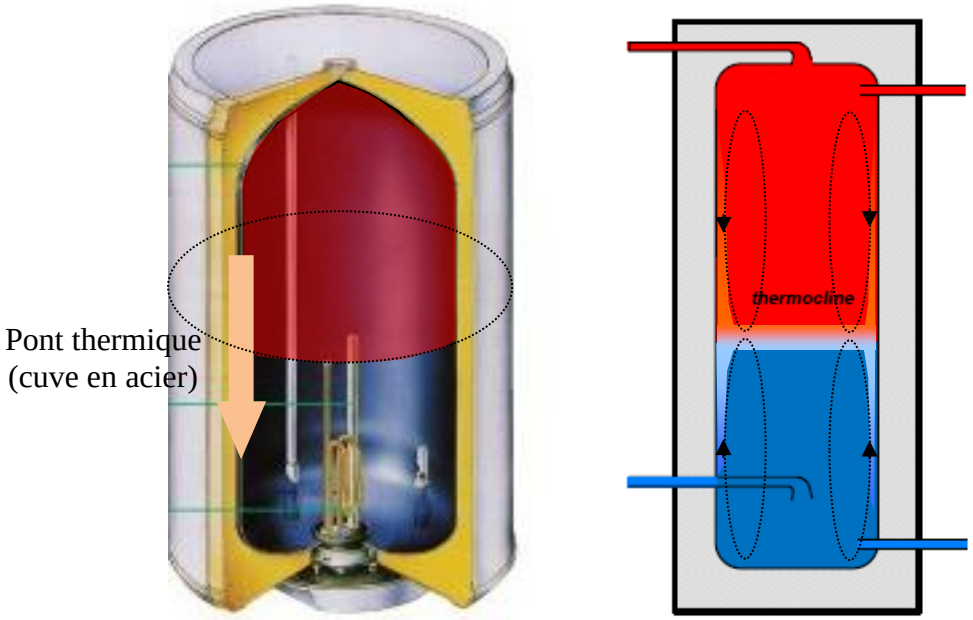
| Symbole | Nom | Domaine | Equation | Seuil | Régime | Formule |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Re | Reynolds | Mécanique des fluides | Navier Stokes (NS) | < 2400 (interne) | Ecoulement laminaire/turbulent | ρVD/µ |
| Pr | Prandtl | Thermique des fluides | Couche limite (BL) | | | $\mu c_p/\lambda$ |
| Nu | Nusselt | Thermique des fluides | Robin | | | hD/λ |
| Bi | Biot | Thermique instationnaire | Robin | < 0.1 | Corps (thermique) mince/épais | *h*D/λ |

La condition de Robin est une relation liant la température et sa dérivée, au bord du volume où on fait le bilan de chaleur (eau du chauffe-eau au contact de la cuve par exemple). Sans respecter une telle « condition aux limites » le problème est mal posé et il est radicalement impossible d'en trouver la solution.

Les nombres sans dimension portent des noms d'ingénieurs parfaitement inconnus du grand public alors que ces savants sont souvent aussi méritants que ceux qui ont donné leurs noms aux unités physiques du système international. Petite consolation, ils ont tous, sans exception, les honneurs de Wikipedia.

*Peut-on s'en tirer à si bon compte ?*

Montrons sur l'exemple du ballon d'eau tiède qu'une incroyable complexité, souvent insoupçonnée, jaillit du couplage des cinq équations.




Si la cuve est une bouteille isotherme, façon vase Dewar, la thermocline va effectivement mettre plusieurs dizaines d'heures à s'épaissir et à envahir le volume du ballon. La force d'Archimède participe à l'équilibre hydrostatique des masses d'eau.

Le courant de chaleur est gouverné exclusivement par la diffusivité thermique [(26)] de l'eau qui est très faible.

Dans la réalité, la cuve est en acier émaillé et conduit bien la chaleur. La virole forme un pont thermique entre la masse d'eau chaude et la masse d'eau froide. L'eau chaude du haut cède de la chaleur à la virole qui la restitue à l'eau froide du bas. Dans une même couche, la température à la paroi n'est pas la même qu'au centre. Les différences de force d'Archimède dans une même couche brisent l'équilibre hydrostatique et forment des boucles de convection pariétales. Le transport d'eau tiède vers le miroir épaissit rapidement la thermocline.

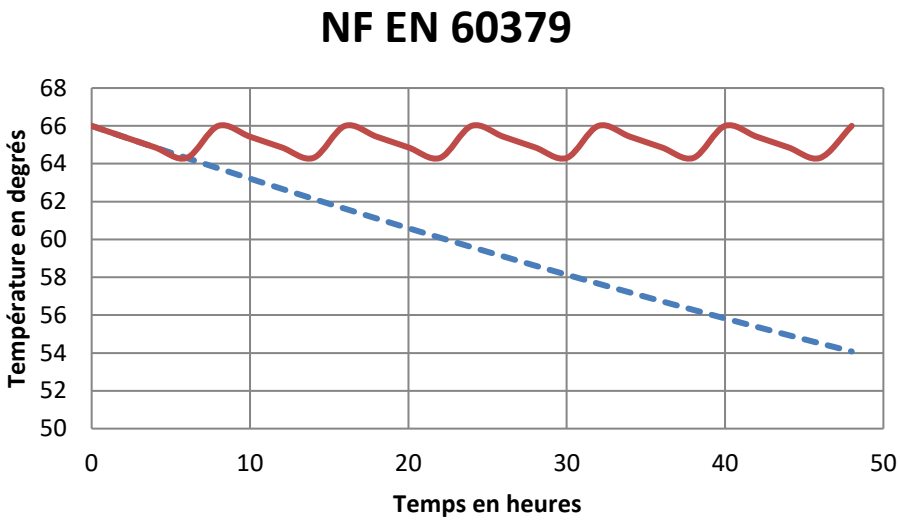
Le courant de chaleur est désormais gouverné par une foule de paramètres, la géométrie, la diffusivité thermique de l'acier [(26)], l'épaisseur de la virole, les nombres de **Grashof (1826-1896)** [(27)] et de **Prandtl (1875-1953)** [(28)]…

Un scénario encore plus rocambolesque est celui d'un ballon uniformément rempli d'eau chaude à 65°C mais relativement mal isolé. A cause des pertes thermiques vers le local, l'eau se refroidit plus vite au contact de la virole qu'au cœur de la masse d'eau. Emportée par son poids, l'eau froide « plonge » et s'accumule au fond de la cuve, reformant une thermocline.

Le deuxième principe de la thermodynamique est-il bafoué ? L'entropie de la cuve diminue singulièrement avec la stratification thermique mais l'entropie du local qui reçoit la chaleur échappée du ballon augmente. Le solde est positif. Clausius est sauf.

Aucun des scénarios précédents n'est véritablement conforme à l'usage courant d'un ballon accumulateur qui implique des puisages d'eau chaude. Avec les puisages, le brassage de l'eau froide en fond de cuve élimine les courants pariétaux et favorise, c'est un paradoxe, la stabilité du miroir pendant son ascension [29]. La nature est moins complaisante qu'espéré mais pas trop contrariante…

La norme EN 60379 fixe les conditions d'essai pour qualifier l'isolation thermique d'un chauffe-eau électrique à accumulation (mesure du $Q_{pr}$ [30] ou anciennement constante de refroidissement $C_r$ des fiches techniques). Pour que l'essai reste simple et reproductible il faut empêcher la stratification. On convient donc de mesurer l'énergie électrique requise pour maintenir l'eau du ballon à 65°C uniformément, pendant 48 heures, dans un local isotherme à 20°C. La température de l'eau suit une courbe dentelée sous l'action d'un aquastat réglé pour couper le courant dans la résistance électrique à 66°C et le rétablir à 64°C.

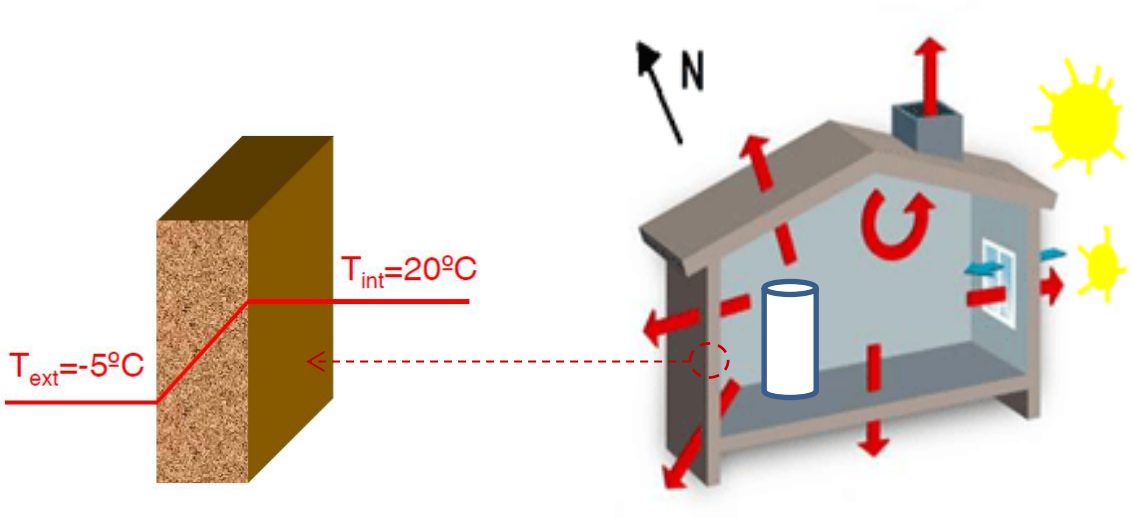



Sous ces conditions, les courants de chaleur et les températures dans le ballon et sa jaquette isolante suivent l'équation de la chaleur [31] qui valut à **Joseph Fourier** d'être couronné par l'Académie en **1812** pour son mémoire « Théorie des mouvements de la chaleur dans les corps solides ».

Au cours des deux siècles qui suivent cette équation est devenue emblématique des sciences physiques. L'analogie entre la loi de Fourier $\mathbf{J_Q} = - \lambda \nabla T$ pour la conduction thermique et la loi d'Ohm $\mathbf{J_e} = \sigma \nabla V$ pour la conduction électrique a favorisé l'usage d'un vocabulaire emprunté aux électriciens.

La cuve du chauffe-eau avec son volume d'eau chaude est assimilée à un composant capacitif qui stocke des joules proportionnellement à la température absolue de l'eau (joules par degré). Elle est reliée à un composant résistif, la jaquette isolante, qui laisse fuir un courant de chaleur en watts, proportionnellement à la différence de température entre l'eau du ballon et l'air du local. La constante de refroidissement de la norme NF (multipliée par le volume d'eau), c'est la conductance thermique (watts par degré) ou l'inverse de la résistance thermique (degrés par watt) de la jaquette.

Dans le secteur du bâtiment, le mur simple ou composite est l'archétype du composant résistif qui isole l'air intérieur de la maison des frimas de l'air extérieur. La conductance par mètre carré de mur ou de dalle est traditionnellement exprimée par un coefficient U ($W.K^{-1}.m^{-2}$) caractéristique des matériaux constitutifs. Si on sait déterminer une température intérieure unique, on peut calculer la conductance totale de la maison en sommant toutes les contributions au courant de chaleur vers l'extérieur, fuites de l'enveloppe et fuites par « ponts thermiques ». Divisée par la surface totale de l'enveloppe, la conductance totale donne le fameux coefficient Ubât [32] de la réglementation thermique française.




Quand on imagine notre ballon d'eau chaude installé dans une pièce de la maison, on voit poindre une difficulté. Le bilan thermique du ballon dépend de la température de la pièce qui dépend de la température intérieure qui dépend de la température extérieure qui dépend de … la température au centre du soleil ! Le problème avec l'équation de la chaleur c'est que bien peu de matériaux sont de vrais isolants thermiques et qu'on ne sait pas toujours bien où placer la frontière du système étudié.

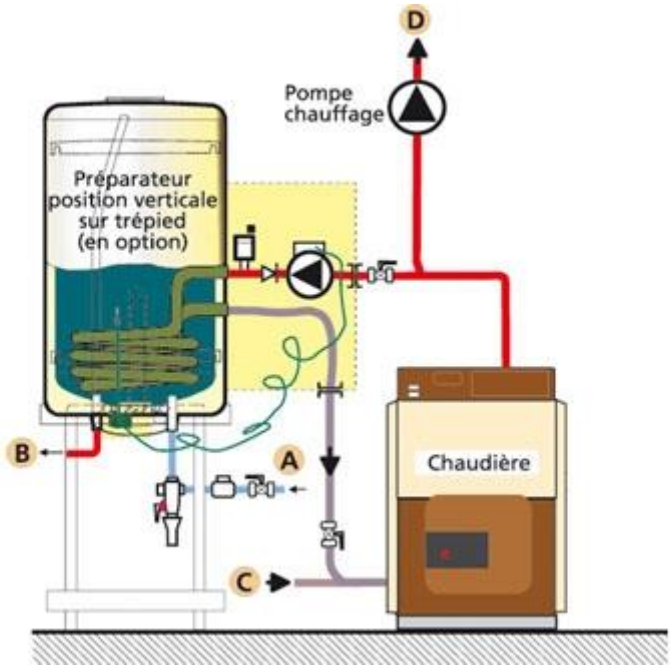
Une autre difficulté tient au régime permanent qui n'existe pas dans la réalité. En régime transitoire tous les matériaux courants sont à la fois résistifs et capacitifs et présentent donc une impédance thermique. Les outils de calcul modernes permettent de faire la simulation thermique complète d'un bâtiment en régime instationnaire pour peu qu'on accepte de faire la collecte rigoureuse des données du bâti, des sources et puits de chaleur, et de la météorologie locale.

Le profil de température de part et d'autre du mur recèle néanmoins une impossibilité physique qu'il faut traiter. Le gradient de température ne peut s'annuler brutalement que si le courant de chaleur pénètre dans un conducteur idéal. Or l'air au repos est un des meilleurs isolants thermiques qui soit. Cependant, dans des espaces ouverts comme l'intérieur de la maison ou, a fortiori, l'environnement extérieur, l'air n'est jamais au repos. Il se renouvelle en permanence au contact du mur, et l'hypothèse d'une température uniforme se justifie.

## Convection…

Avant de traiter la question de la convection libre, parlons de la convection forcée, plus spécifiquement de la convection forcée interne, c'est-à-dire à l'intérieure d'une conduite.

A titre d'exemple, un ballon préparateur d'eau chaude dispose d'un élément chauffant qui peut être un serpentin dans lequel un circulateur force un courant de fluide caloporteur.




A l'intérieur du serpentin les forces d'Archimède sont dérisoires par rapport à la pression motrice et l'hydraulique retrouve son indépendance totale par rapport à la thermique. En régime stationnaire, la puissance mécanique consommée dans le serpentin et la puissance thermique délivrée par le serpentin sont données par deux formules jumelles (en valeurs absolues) qu'on trouve dans les documentations techniques des équipements.

| | | |
|---|---|---|
| $P_m$ = | débit en poids | × $\Delta H_Q$ perte de charge en m [33] |
| $P_c$ = | débit en chaleur spécifique | × $\Delta T_Q$ chute de température en °C [34] |

On imagine qu'il existe une forme de correspondance entre le refroidissement du fluide caloporteur dans le serpentin et la perte de charge hydraulique. Commençons par étudier cette dernière.

Que donnent les équations de Navier Stokes dans le cas d'un débit d'eau permanent dans un tuyau cylindrique lisse de grande longueur ?

Aussi lisse que soit l'intérieur du tuyau, il existe toujours une couche de molécules d'eau immobiles au contact direct de la paroi. Cette condition de non glissement interdit une distribution uniforme (distribution « bouchon ») de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement. Le courant de la rivière s'annule toujours près des berges…

Sans beaucoup d'effort mathématique on trouve au moins une solution, le profil parabolique de vitesse de **Poiseuille (1797 – 1869)**, avec une formule très simple de la perte de charge ΔH proportionnelle à la longueur de tuyau, à la vitesse de débit, et à la viscosité moléculaire.

*La nature est-elle si complaisante qu'elle accepte que le chaos moléculaire soit dompté par le « Computational Fluid Dynamics » ? Un champ de vitesses, lisse à l'échelle hydrodynamique, est-il l'oméga de la thermodynamique ?*

Hélas, l'écoulement laminaire de Poiseuille, lisse et régulier, n'est constaté expérimentalement que pour de tout petits débits. Dans presque toutes les applications hydrauliques ou aérauliques du génie climatique, les écoulements sont turbulents. En tout point du tuyau, la vitesse varie brutalement en intensité et en direction.

Les équations de Navier Stokes sont-elles fausses au-dessus d'un seuil de débit ?

Pas nécessairement. On connaît des solutions d'équations différentielles qui changent radicalement d'allure - on dit qu'elles « bifurquent » - selon la valeur d'un paramètre. Les équations de Navier Stokes sont néanmoins particulièrement coriaces. Personne n'a jamais pu démontrer qu'elles admettaient, en toutes circonstances, une solution compatible avec l'échelle hydrodynamique [(35)].

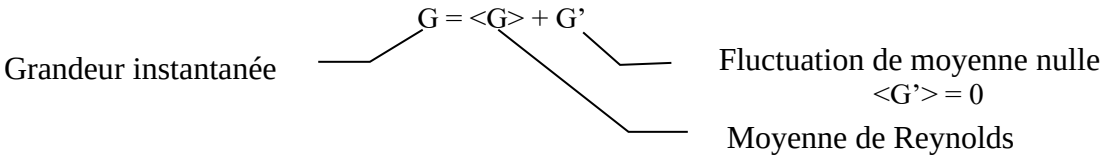
Paradoxalement, cet échec des mathématiciens laisse toutes leurs chances aux équations de Navier Stokes. Aujourd'hui, on imagine que des solutions tourbillonnaires peuvent naître spontanément d'équations non linéaires comme celles de Navier Stokes, même avec des conditions aux limites très lisses. Avec en outre une dose de dépendance sensitive aux conditions initiales on ne peut échapper à des écoulements d'allure chaotique en dépit de la régularité trompeuse des équations.

En somme, mettez les molécules à la porte, elles rentrent par la fenêtre, agglomérées en tourbillons…

Comme les molécules, les tourbillons refusent manifestement d'avoir une histoire individuelle. On démontre que le nombre de volumes élémentaires et de pas de temps nécessaire à la simulation directe des tourbillons augmente grosso modo comme le cube du nombre de **Reynolds (1842-1912)** [(36)].

On se retrouve donc avec un million de milliards ($10^{15}$) de mailles de calcul et le même obstacle anthropique que pour le gaz d'électrons ou de molécules.

En réponse, la physique statistique postule l'existence d'un opérateur <moyenne de Reynolds>, défini sur les copies mentales de Gibbs. Toute grandeur turbulente G donne lieu à décomposition de Reynolds.




La différence entre moyenne de Reynolds et moyenne de Gibbs, c'est que la fluctuation turbulente G' est certes nulle en moyenne mais que sa valeur instantanée n'est pas du tout négligeable face à la valeur moyenne <G>.

A-t-on vraiment besoin d'étudier les fluctuations G' ? La fluctuation de vitesse **V'** par exemple n'apporte aucune contribution au débit Q (en $m^3/s$) des formules jumelles citées plus haut.

Manque de chance, à cause de la dérivée composée, les équations de Navier Stokes, valables pour le champ de vitesse instantané **V**, ne sont plus valables pour le champ de vitesse moyen <**V**>. Tout se passe comme si la friction augmentait brutalement, sauf que cette friction supplémentaire est exclusivement inertielle et n'a plus rien à voir avec les molécules du fluide.

Donc, en dehors de l'écoulement laminaire de Poiseuille, on a besoin de connaître cette friction d'un nouveau type [37] pour calculer la perte de charge $\Delta H_Q$. Cette dernière n'augmente plus comme la vitesse de débit mais comme son carré. Elle ne dépend quasiment plus de la viscosité moléculaire du fluide.

Précisons que, même si le problème du Prix du Millénaire est résolu un jour, il faut une théorie de la turbulence pour calculer les moyennes des champs turbulents. A supposer que les ordinateurs arrivent un jour à suivre la dynamique des tourbillons, la rugosité de la paroi induit forcément sa dose de chaos en propre.

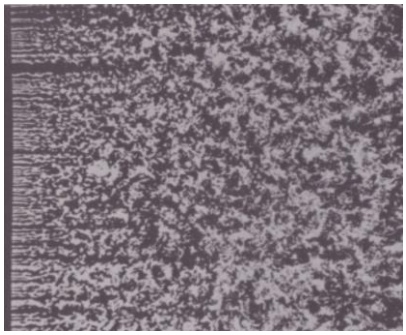
Si on considère que les équations de bilan jouent, pour les tourbillons fluides, le rôle que l'opérateur énergie joue pour les particules élémentaires, dispose-t-on d'une formule aussi élégante que la formule de Gibbs [38] pour calculer les moyennes de Reynolds, les contraintes de friction en particulier ?

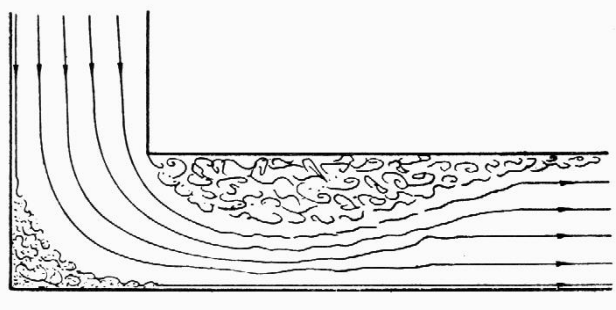
Concernant les électrons libres du cuivre, Fermi invoque l'équilibre thermique à l'ambiance pour formuler une distribution statistique d'énergie fonction de deux coefficients.

Concernant les tourbillons, **Kolmogorov (1903-1987)**, suggère l'existence d'une forme idéale de turbulence, « développée, stationnaire, homogène et isotrope », une sorte de bouillon en équilibre inertiel [39].

Il démontre que les corrélations des écarts de vitesse entre deux endroits de son bouillon idéal ne dépendent en moyenne que de l'écartement des points et d'une grandeur purement frictionnelle ε.

Exprimée en watts par kilogramme de fluide, la grandeur ε mesure la vitesse de dégradation de l'énergie turbulente en chaleur.





La théorie de Kolmogorov (**1941**) justifie brillamment une intuition que Boussinesq, encore lui, exprime 64 ans plus tôt. Les contraintes de Reynolds peuvent, selon Boussinesq, se décomposer en une petite correction de la pression motrice moyenne plus une correction énorme de la viscosité moléculaire [40]. Fort de ces corrections, Boussinesq préserve le formalisme de Navier Stokes.

La correction de pression motrice réduite [41] <k>, exprimée en joules par kilogramme de fluide, est un terme d'énergie cinétique par unité de masse, comme dans l'effet Venturi. L'énergie de la turbulence <k> et son taux de dissipation ε permettent, ensemble, de calculer le nouveau champ de viscosité turbulente $\mu_T$ [42].

Reste, comme en thermique, à dire ce qui se passe « hors d'équilibre » dans un écoulement réel, inhomogène et anisotrope par construction.

**Launder** et **Spalding** nous servent en 1974 à peu près le même plat que les pionniers de la TPI. Toute turbulence est homogène et isotrope à l'échelle hydrodynamique. Les deux ingénieurs britanniques posent les équations de Navier Stokes en moyenne de Reynolds (RANS, Reynolds Averaged Navier Stokes) assorties de deux bilans supplémentaires pour assurer la fameuse fermeture du système d'équations dont le nombre de champs inconnus passe à sept (<**V**>, <p>, <k>, ε, <T>).

| Bilan | Nbre d'équations | Champs moyens concernés |
|---|---|---|
| Masse | 1 | Vitesse |
| Qté de mouvement | 3 | Vitesse et pression motrice réduite |
| Energie cinétique turbulente | 1 | Energie cinétique turbulente |
| Dissipation de la turbulence | 1 | Taux de dissipation |
| Chaleur | 1 | Température |

Les quatre premiers bilans de champs moyens ont une propriété tout à fait étonnante, dont on ne sait pas trop s'il s'agit d'une loi de la nature ou d'une faiblesse des théories de la turbulence. Si on exclut un film très mince au contact des parois solides, pas une seule caractéristique physique du fluide étudié n'intervient dans les équations.

Pour un débit donné dans un dispositif comme notre serpentin, que le fluide soit de l'eau, de l'essence, de l'air ou du méthane, rien ne change, ni la perte de pression motrice réduite, ni le profil de vitesse. Tout au plus, l'œil averti du théoricien voit une différence dans la taille des plus petits tourbillons, la longueur de Kolmogorov. L'ingénieur avec son manomètre a tout de même besoin de la masse volumique pour retrouver une grandeur dont il a l'habitude comme la hauteur manométrique.

Si **Aristote (quatrième siècle av JC)** avait su, il aurait sans doute ajouté un cinquième élément à sa liste, la terre, l'eau, l'air, le feu … et le « turbulent ». L'eau, l'air et le feu peuvent s'écouler et, au-delà d'une vitesse critique d'écoulement, ils se muent tous en « turbulent ».

En fait, il y a autant de « turbulents » que de modèles théoriques de turbulence, chaque modèle fixant la rhéologie précise de notre cinquième élément.

L'universalité de la turbulence est bien commode mais il ne faut pas perdre de vue qu'elle traduit autant l'universalité de l'approche statistique qu'une réalité physique incontestable.

Le parallélisme entre la théorie de la turbulence et la physique statistique procède d'une organisation de la pensée scientifique. Il faut garder à l'esprit que la théorie de la turbulence n'a pas encore trouvé les objets élémentaires susceptibles de fonder une mécanique ou une chimie de la turbulence.

| | Physique statistique | Turbulence |
|---|---|---|
| Source de chaos | Modèle de collisions | Equations de Navier Stokes |
| Obstacle anthropique | Nombre d'Avogadro | Longueur de Kolmogorov |
| Moyenne de Gibbs | Matrice densité | Décomposition de Reynolds |
| Condition d'équilibre | Equilibre thermique | Turbulence développée |
| Formulation statistique | Formule de Gibbs | Hypothèse de Boussinesq |
| Systèmes hors d'équilibre | Equilibre local (Boltzmann) | Equilibre local (Kolmogorov) |
| Simulation numérique | FEM (conduction thermique) | RANS modèle k-ε |

*Si néanmoins on décide de faire confiance à une théorie de la turbulence pour la convection, a-t-on réglé définitivement la question des échanges de chaleur ?*

Même une configuration simple comme le serpentin du ballon préparateur d'eau chaude bénéficie d'une théorie de la turbulence pour le calcul précis de la perte de charge hydraulique.

Ce qui est moins intuitif c'est que le régime thermique du serpentin est en relation étroite avec la perte de charge hydraulique, notamment par le biais de « lois de paroi » qui régissent simultanément la production de tourbillons et la propagation radiale de chaleur.

Poursuivons donc l'étude hydraulique du serpentin. Un modèle mécanique simpliste, celui du piston de liquide cylindrique « poussé » par la différence de pression motrice entre ses bases et « freiné » par le frottement de la surface latérale avec le tuyau, prévaut pendant tout le XIXe siècle.

Un nombre sans dimension, le coefficient de friction de **Fanning** [(43)] (ou celui de **Darcy**), permet de calculer une perte de charge pour un tuyau de diamètre D, toujours proportionnelle à la longueur de tuyau L, et plutôt proportionnelle au carré de la vitesse de débit V quand le régime turbulent est établi.

$$\Delta H_Q = - 4C_f \ (V^2/2g) \ (L/D)$$

Le coefficient de friction $C_f$ est alors en relation directe avec la moyenne du taux de dissipation d'énergie turbulente de la théorie de Kolmogorov [(44)]. Retenons que si le concept de perte de charge linéaire date du XIXe, les corrélations numériques indispensables au calcul hydraulique ne sont pas établies avant le milieu du XXe siècle. Le coefficient de friction turbulent varie typiquement dans une plage $0.005 < C_f < 0.010$, en augmentant avec la rugosité du tuyau.

On se souvient que, dans la limite de validité des équations de Navier-Stokes, le bilan de chaleur peut être établi à partir du champ des vitesses, sans devoir corriger les vitesses après coup. Ainsi, dans un tube non calorifugé plus froid que le fluide caloporteur, l'écoulement laminaire de Poiseuille donne naissance à un courant de chaleur perpendiculaire à l'écoulement.

Ce courant de chaleur radial est proportionnel à la conductivité thermique du fluide caloporteur et à la différence de température entre le fluide et la paroi du serpentin divisée par le diamètre du tube.

On se souvient aussi que les équations de Navier Stokes ne fonctionnent pas avec les grandeurs moyennes des écoulements turbulents. Pour les faire fonctionner il faut invoquer une viscosité turbulente nettement plus grande que la viscosité moléculaire.

Si on écrit le bilan de quantité de mouvement en moyenne de Reynolds (RANS), il faut aussi admettre que la température T fluctue avec les tourbillons et écrire le bilan de chaleur en moyenne de Reynolds. Les mathématiciens sont capables de prouver qu'avec les hypothèses de Kolmogorov et de la TPI, la loi de Fourier s'applique rigoureusement à la propagation de la chaleur par turbulence. Le coefficient de proportionnalité est la conductivité thermique turbulente $\lambda_T$.

$$\langle \mathbf{J_T} \rangle = - \lambda_T \nabla \langle T \rangle$$

La conductivité thermique turbulente ($\lambda_T$) est à la conductivité thermique moléculaire ($\lambda$) ce que la viscosité turbulente ($\mu_T$) est à la viscosité moléculaire ($\mu$). Cette phrase résume une analogie attribuée à Reynolds, qui sert de théorie pour le transfert thermique en régime turbulent. L'analogie de Reynolds s'exprime numériquement avec un nouveau nombre sans dimension, le Prandtl turbulent.

$$Pr_T = c_p \ (\mu_T/\lambda_T)$$

Que peut bien valoir le Prandtl turbulent ? La réponse est $Pr_T \cong 1$et de toute façon, ça n'a pas beaucoup d'importance…

L'analogie de Reynolds implique que le fluide caloporteur est plus chaud au centre du tube que sur les bords [45]. Ce profil thermique bombé correspond exactement à la répartition de la vitesse dans une section transversale, vitesse forte au milieu, nulle sur les bords. Comme la chaleur va toujours du chaud vers le froid, elle s'échappe du serpentin, latéralement. C'est à cause de cette « fuite » latérale de chaleur que le fluide caloporteur se refroidit entre l'entrée et la sortie du serpentin.

L'analogie de Reynolds cache néanmoins une grosse différence entre la mécanique de l'écoulement turbulent et sa thermique.

L'essentiel de la perte d'énergie mécanique du fluide se produit dans le corps de l'écoulement et sa cascade de tourbillons. La mince couche de fluide au repos au contact de la paroi, baptisée sous couche limite laminaire ou film laminaire, n'a aucun poids dans la dissipation d'énergie mécanique. Pour fixer les idées le film d'air dans une gaine de ventilation mesure un millimètre et moins d'épaisseur, et le film d'eau dans le tuyau du plombier mesure 100 microns et moins.

A contrario, le fluide piégé dans le film laminaire agit comme un isolant où se concentre l'essentiel de la résistance thermique. Par contraste, la bonne conductivité thermique des tourbillons fait du corps de l'écoulement un conducteur de chaleur presque parfait où la température s'uniformise par mélange. Le courant de chaleur radial est toujours proportionnel à la conductivité thermique du fluide caloporteur et à la différence de température entre l'axe et la paroi du serpentin. Mais, au dénominateur, il y a maintenant l'épaisseur du film, infiniment plus petite que le diamètre du tube.

La valeur précise du Prandtl turbulent est sans influence sur l'épaisseur de la couche limite thermique. L'analogie de Reynolds suggère en revanche une relation étroite entre profil transversal de température et profil de vitesse.

La température de mélange $T_Q$ d'une section comprise entre l'entrée et la sortie du serpentin est une température moyenne un peu spéciale [46]. Elle diminue avec la distance à l'entrée. On note $\Delta T_Q$ le refroidissement entre les extrémités. A courant de chaleur radial uniforme la température de paroi $T_w$ diminue comme la température de mélange. La différence $T_Q - T_w$ est la même pour toutes les sections. Dans ces conditions chaque terme à droite dans la formule ci-dessous est une constante du serpentin et de son fonctionnement.

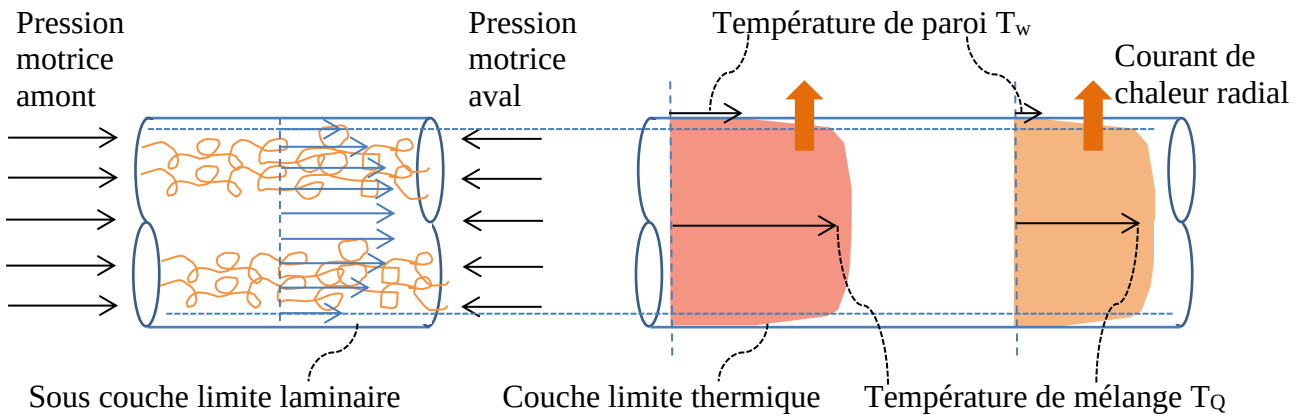
$$\Delta T_Q = - 4\ St\ \Delta\Theta\ (L/D)$$
$$\Delta\Theta = T_Q - T_w$$

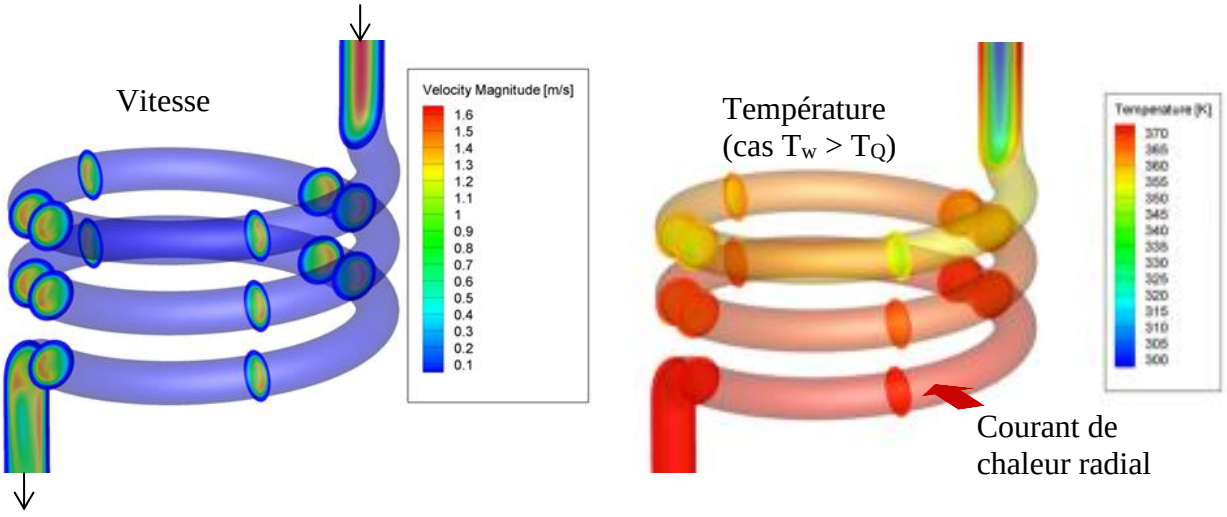
St nombre sans dimension de **Stanton**

Quand l'analogie de Reynolds est complète [47], la ressemblance entre bilan de quantité de mouvement et bilan thermique est frappante. On montre que le Stanton vaut exactement la moitié du Fanning. A débit de fluide donné, plus on dissipe d'énergie mécanique, plus l'écoulement turbulent « pince » le film laminaire, et meilleur est l'échange thermique.

$$\Delta H_Q = - 4\ C_f\ (V^2/2g)\ (L/D)$$
$$\Delta T_Q = - 4\ C_f\ (\Delta\Theta/2)\ (L/D)$$

Au fait, que devient l'énergie mécanique dissipée par friction fluide ? De la chaleur, bien sûr, qui vient interférer avec le bilan thermique du serpentin mais à dose imperceptible. Essayez-donc de chauffer l'eau du ballon avec le circulateur seul, sans apport d'une chaudière ou d'un panneau solaire !


Pression motrice amont
Pression motrice aval
Température de paroi $T_w$
Courant de chaleur radial
Sous couche limite laminaire
Couche limite thermique
Température de mélange $T_Q$


Vitesse
Velocity Magnitude [m/s]
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
Température (cas $T_w > T_Q$)
Courant de chaleur radial

La surface totale d'échange du serpentin S (en $m^2$), qui combine sa longueur L et son diamètre D, est une caractéristique fondamentale de l'échangeur qu'on fait apparaître dans le bilan de chaleur du serpentin [48].

$$P_c = h\ S\ \Delta\Theta$$

h = ($\rho c_p V$) St, coefficient de transfert thermique

C'est la loi empirique du refroidissement, publiée par **Newton** en **1701** et très largement vulgarisée dans la littérature comme « loi de refroidissement du bol de soupe chaude ». Elle n'est valable que pour un solide (ou un liquide au repos comme la soupe), en contact avec un fluide en mouvement. Il faut, en outre, savoir définir une différence de température $\Delta\Theta$ entre le fluide et le solide et que cette différence ne soit pas trop grande. Donnons des plages de valeurs purement indicatives pour le coefficient h, mesuré en watt par mètre carré et par degré ($W.m^{-2}.K^{-1}$).

| Fluide mobile | Convection naturelle | Convection forcée |
|---|---|---|
| Air | 3 < h < 30 | 10 < h < 500 |
| Eau | 100 < h < 900 | 100 < h < 15000 |
| Huile | 5 < h < 100 | 50 < h < 2000 |

Le coefficient h augmente avec la conductivité moléculaire du fluide et diminue avec l'épaisseur de la couche limite thermique. Ces variations invitent à former le nombre sans dimension de **Nusselt (1882-1957)**, plébiscité par les ingénieurs thermiciens. Le Nusselt mesure l'efficacité de l'échange thermique avec le fluide de refroidissement (ou de chauffage). Pour un tuyau de diamètre D :

$$Nu = hD/\lambda$$

Mais les ingénieurs ne se contentent pas de plages de valeurs. Comment préciser les valeurs du Fanning $C_f$ (entre 0.005 et 0.01) et du Nusselt Nu (entre 10 et 10000) ?

Launder et Spalding ont inventé le modèle de calcul RANS et turbulence k-ε précisément pour calculer la perte de charge hydraulique de composants comme le serpentin. Néanmoins, dans le cas d'un long tube rectiligne, le code de calcul CFD ne fait que confirmer les résultats d'expériences magistrales conduites trente-trois ans auparavant **(1939)** par **Colebrook (1910 – 1997)**.

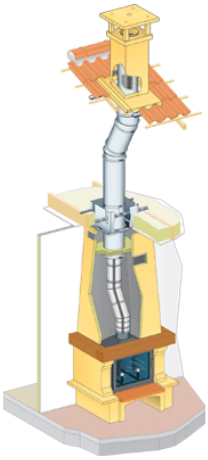
L'abaque de Colebrook est même supérieur aux codes numériques quand le tube n'est pas lisse et qu'il faut tenir compte de la rugosité dans l'évaluation du coefficient de friction de Fanning.

Quand l'analogie de Reynolds est complète, un calcul simple [49] montre que Nu = ½ Re $C_f$ donc pas besoin de nouvelle corrélation pour le transfert thermique. Cette formule ne résiste pas bien, hélas, à la réalité expérimentale.

**Dittus** et **Boelter** d'abord, puis **Petukhov** et **Gnielinski** [50] plus récemment, ont ciselé des corrélations expérimentales très convaincantes pour le Nusselt d'un long tube rectiligne. Constatons qu'il s'est écoulé plus de 250 ans entre l'intuition de Newton et les corrélations indispensables au calcul moderne !

| Corrélation | Date | Coefficient | Portée | Formule | |
|---|---|---|---|---|---|
| Dittus - Boelter | 1930 | Nusselt | $10000<Re<1.2\ 10^5$ | Nu = f(Re, Pr) | explicite |
| Prandtl - Nikuradse | 1935 | Fanning | Tube lisse | $g(\sqrt{C_f}, Re) = 0$ | implicite |
| Colebrook - White | 1937 | Fanning | Tube rugueux | $g(\sqrt{C_f}, Re, \text{rugosité}) = 0$ | implicite |
| Petukhov - Gnielinski | 1975 | Nusselt | $3000<Re<5\ 10^6$ | Nu = f(Re, Pr, $C_f$) | explicite |

La corrélation de Dittus-Boelter est aussi utilisée pour les écoulements turbulents dans les conduits de fumée des chaudières et des poêles voire dans les circuits primaires des capteurs solaires thermiques, que la convection soit mixte ou même carrément naturelle (thermosiphon). Dans la limite de l'approximation de Boussinesq, la source motrice de l'écoulement, turbine ou force d'Archimède ou les deux, n'a aucune incidence sur la friction dans les tuyaux.



L'étude du serpentin n'est pas terminée. En régime stationnaire, le serpentin est un composant résistif traversé par un courant de chaleur qui alimente un composant capacitif, la cuve du ballon. Pour fixer les idées, un courant de chaleur radial de 25 kilowatts, soit la puissance maximum d'une chaudière gaz individuelle, est délivré par un courant d'eau de 2 $m^3/h$ qui perd 10°C entre l'entrée « chaude » (85°C) et la sortie « froide » (75°C) du serpentin. On écrit la formule de définition de la chaleur massique de l'eau qui est aussi la formule d'accumulation de la chaleur dans le ballon, en l'absence de puisage.

$$P_c = m c_p \, (dT/dt)$$

m masse d'eau dans le ballon en kg

On sait qu'il faut 4186 joules pour augmenter d'un degré la température d'un litre d'eau. Si le serpentin délivre en moyenne 25000 watts aux 200 litres d'eau du ballon accumulateur, la température de la masse d'eau augmente de moins de deux degrés par minute. A cette vitesse, on peut dire qu'à tout moment l'eau du ballon sert de liquide de refroidissement au serpentin et tenter d'appliquer la formule de Newton.

$$P_c = h \, S \, \Delta\Theta$$
$$\Delta\Theta = T_w - T$$

A l'intérieur du serpentin, l'eau de chauffage (primaire) est poussée, du haut vers le bas, par le circulateur. A l'extérieur du serpentin, l'eau du ballon à réchauffer (secondaire) est libre et animée d'un mouvement de convection naturelle, du bas vers le haut. Comme indiqué dans le tableau des plages de valeurs de h, la convection naturelle peut être dix fois moins efficace que la convection forcée.

Pour une surface d'échange du serpentin de 1 $m^2$ et une puissance de 25000 watts, une valeur de 700 $W.m^{-2}.K^{-1}$ du coefficient h de convection naturelle implique une différence de 35°C environ entre l'eau du primaire et l'eau du secondaire. L'ordre de grandeur n'est pas idiot mais l'ingénieur ne se satisfait évidemment pas de cet à peu près.

Hélas, les corrélations ciselées pour la convection interne dans un tube cylindrique ne conviennent plus du tout pour la convection libre autour de ce tube. Quelle taille caractéristique D choisir ? Quelle vitesse de référence V adopter ?

Pour mieux saisir les mécanismes de la convection libre on choisit un échangeur plus simple que le serpentin eau/eau du ballon d'eau chaude sanitaire mais encore plus emblématique de la thermique du bâtiment, le radiateur acier de chauffage central, qui est un échangeur eau/air.

La norme européenne EN 442 standardise la mesure du courant de chaleur $P_{50}$ qui sort d'un radiateur panneau en régime thermique stabilisé. Le régime 75/65/20 revient à imposer une différence de température de 50°C entre le panneau et l'air ambiant du laboratoire.

A partir des données de $P_{50}$ des catalogues de constructeurs, les installateurs sont invités à dimensionner leurs équipements en combinant une température d'air ambiant $T_\infty$, une température moyenne de panneau $T_w$ et une pente de radiateur n selon une formule simplifiée.

$$P_c = P_{50}\,(\Delta\Theta/50)^n$$
$$\Delta\Theta = T_w - T_\infty,\ n \cong 1.3$$

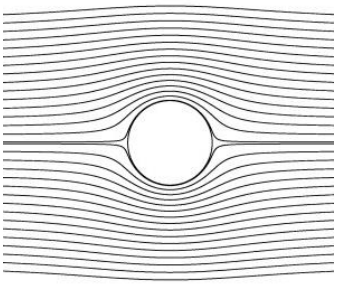
Que signifie cette pente d'émission supérieure à un, en contradiction apparente avec la loi linéaire de refroidissement de Newton ?

Avant de répondre, il faut signaler qu'un radiateur acier « type 22 » comme celui figuré au-dessus devrait s'appeler une cheminée chauffante. L'essentiel du courant de chaleur provient du courant d'air ascendant (vitesse ascensionnelle de 0.5 mètre par seconde pour fixer les idées) propulsé par effet thermosiphon dans la gaine garnie d'ailettes formée par les deux panneaux.

La façade en acier du côté de la pièce à chauffer participe aussi à la convection mais d'une façon originale. Certains détails ne sont connus que grâce à l'aéronautique !

Fin 1903, les frères **Wright** font voler leur avion Flyer sur plusieurs centaines de mètres alors que la mécanique des fluides reste encalminée dans la formule de **Bernoulli (1700-1782)** et le paradoxe de **d'Alembert (1717-1783)**. A l'époque, on calcule les vitesses d'air et les pressions à partir d'écoulements idéalisés, les écoulements potentiels. Le prix de cette facilité, c'est que le fluide idéal glisse autour des obstacles sans exercer aucun effort de traînée, contrairement au sens commun.

On reproduit ci-dessous des images déjà utilisées plus haut car l'origine de la contradiction, c'est bien la réversibilité des mécanismes qui ne peut pas exister avec les fluides réels, même peu visqueux. Les oscillations du pendule s'amortissent à cause de la dissymétrie de l'écoulement et de la traînée de l'air.



Ecoulement potentiel
(contre nature)

En 1904, dans une communication de dix minutes au troisième Congrès International des Mathématiciens (ICM) à Heidelberg, **Ludwig Prandtl (1875-1953)** affirme qu'une couche fluide, même infiniment mince, qui adhère à l'obstacle, est capable de perturber l'écoulement potentiel autour de l'obstacle sur une distance suffisamment longue pour justifier trainée et portance. En établissant la possibilité d'un calcul approché des efforts sur une aile d'avion, la communication de Prandtl sème le germe de toute l'aéronautique du XXe siècle.

Prandtl et ses élèves de l'Université de Göttingen sont des ingénieurs et des mathématiciens exceptionnels. A coups d'ordres de grandeurs et d'infiniment petits ils écrivent une forme dégénérée des équations de Navier-Stokes (NS) valable au contact de parois solides raisonnablement planes, les équations de la couche limite (BL pour Boundary Layer en Anglais). La couche limite thermique fait partie de la théorie, un peu par inadvertance, car les échanges de chaleur sont jugés, à l'époque, moins prioritaires que la mécanique du vol [51].

Pour des raisons bien à eux, les mathématiciens trouvent les équations BL plus maniables que les équations NS. En témoigne la classe des solutions « affines » trouvée par l'élève **Blasius (1883-1970)** et applicable telle quelle au courant ascendant de convection naturelle qui remonte le long de la façade chaude du radiateur type 22.

Tous calculs faits, on découvre que le coefficients de transfert thermique n'est pas constant mais croît légèrement avec la différence de température $\Delta\Theta$ entre la façade du radiateur et l'air de la pièce.

On voit bien que la formule du $P_{50}$ de la norme est d'inspiration scientifique. Comme il faut néanmoins combiner l'effet thermosiphon entre les deux panneaux, l'effet thermosiphon entre le panneau arrière et le mur de la pièce à chauffer, la convection externe le long de la façade et le rayonnement électromagnétique que nous verrons plus tard, les autorités réglementaires préfèrent confier aux expérimentateurs le soin de déterminer la pente d'émission n du radiateur type 22.

Citons néanmoins la formule du coefficient $h_L$ de convection naturelle externe le long d'une façade verticale de hauteur L à la température $T_w$ dans une pièce à la température $T_\infty$. Telle qu'elle sort des équations de Blasius, la formule n'est valable que pour un courant d'air ascendant laminaire [52].

$$h_L = 5.6\ ((T_w/T_\infty) - 1)/L)^{0.25}$$

Pour un radiateur de hauteur 70 cm dont la façade est à 70°C (343°K) dans une pièce à 20°C (293°K), la formule donne 4 $W.m^{-2}.K^{-1}$. C'est trop peu. Si on cherche la performance de l'échange thermique c'est bien la « cheminée » à ailettes du radiateur type 22 qu'il faut privilégier. Mais jusqu'où peut-on aller dans l'exploitation des équations, dès lors qu'on admet une part de turbulence ?

*Les équations de champ (NS, RANS, BL…) permettent de calculer les détails de la convection. Cet arsenal assure-t-il la solidité théorique des corrélations qui donnent un coefficient de transfert thermique en fonction de l'écoulement ?*

Faisons d'abord le point sur les deux grandes lois phénoménologiques que nous venons de visiter, la loi de la chaleur de Fourier et la loi de refroidissement de Newton. Une loi phénoménologique est une loi vérifiée par l'expérience, qu'on peut aussi déduire de lois plus fondamentales.

| Loi | Phénomène | Théories sous-jacente | Emploi | Régime temporel |
|---|---|---|---|---|
| Fourier | Conduction | Mécanique statistique + mécanique quantique | Equations de champ | Varié |
| Newton | Convection | Idem + mécanique des fluides + turbulence | Conditions de bords | Stationnaire |

La loi de Fourier permet d'écrire le bilan de chaleur comme une équation de champ de température. Elle est justifiée par la cinétique microscopique des porteurs de chaleurs cristallins ou moléculaires.

La loi de Newton permet de fermer le bilan de chaleur à la frontière du système. C'est bien commode pour éviter de repousser cette frontière jusqu'au centre du soleil ! La loi est justifiée par la convection forcée ou naturelle du fluide qui entoure le système.

La formulation rigoureuse de la loi de refroidissement de Newton définit la projection du micro-courant de chaleur sur la normale à la frontière entre un corps solide et un fluide caloporteur.

$$J_w = h\,(T_w - T_{ref})$$

| | |
|---|---|
| $J_w$ | micro-courant en watt par mètre carré (solide vers fluide) |
| $T_w$ | température à la surface du solide |
| $T_{ref} = T_\infty$ | température asymptotique, écoulement de fluide externe |
| $T_{ref} = T_Q$ | température de mélange, écoulement de fluide interne |

Sans précaution supplémentaire, la loi de Newton est incohérente. Sauf dans le cas de l'air où la couche limite est si mince que la capacité thermique de la couche peut être négligée quel que soit le régime.

Pour les autres fluides, les valeurs expérimentales du coefficient h sont parfaitement erratiques tant qu'on n'impose pas un régime thermique stationnaire ou très lentement variable.

Quels sont, en régime stationnaire, les facteurs explicatifs des valeurs de h ?

L'universalité du « turbulent », établie par la théorie hydraulique, s'évanouit complètement avec la théorie de la chaleur. L'analyse dimensionnelle, une technique complémentaire de l'analyse inspectionnelle, précise que le Nusselt est une fonction du Reynolds et du Prandtl. Les corrélations empiriques confirment bien cette prédiction théorique [(53)].

Le coefficient de transfert thermique h, le Graal de l'ingénieur thermicien, dépend alors de la viscosité, de la conductibilité thermique et de la chaleur spécifique du fluide. Aristote est pardonné ! L'eau, l'air et le feu (les gaz de combustion) retrouvent toute leur individualité.

Dans le cas de la convection naturelle, la dilatabilité du fluide se rajoute aux précédents facteurs explicatifs et on substitue le nombre de **Grashof** [(54)] (sa racine carrée) au nombre de Reynolds dans les formules.

Le coefficient h dépend de bien d'autres facteurs encore que la thermo dépendance du caloporteur.

L'histoire des corrélations est inscrite dans le tableau des méthodes d'évaluation de h ci-dessous.

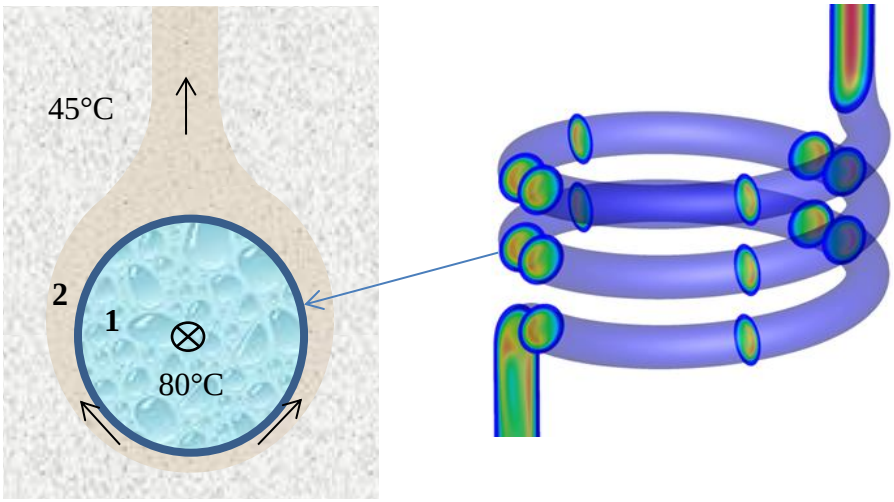
| | **Ecoulements laminaires** | | **Ecoulements turbulents** | |
|---|---|---|---|---|
| **Tubes et plaques** | Méthodes analytiques | après 1900 | Méthodes empiriques<br>Méthodes numériques | après 1930<br>après 1990 |
| **Autres géométries** | Méthodes numériques | après 1970 | Méthodes numériques | après 2000 |

Pour les écoulements purement laminaires et des géométries simples, des ingénieurs allemands comme **Graetz** et **Prandtl** mènent les calculs jusqu'au bout dès le début du XXe siècle. Pour les écoulements turbulents, les premiers modèles des années 1970 sont incapables de reproduire les comportements asymptotiques très près des parois. Il faut attendre vingt ans les améliorations apportées par les universités américaines (**Wilcox**, **Menter** et autres) pour que les codes CFD donnent des valeurs de transfert thermique en bon accord avec les expériences.

En sortie de simulations numériques, l'analyse factorielle propose un florilège de formules dont on donne une version succincte.

$$Nu = a + b\ Re^{c}\ Pr^{d}\ Gr^{e}$$

| **Géométrie** | | **Convection** | | **Ecoulement** | | **Régime** | | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tubes | Plaques | Forcée | Naturelle | Interne | Externe | Turbulent | Laminaire | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| **1** | | **1** | | **1** | | **1** | | 0 | 0.0243 | 0.8 | 0.3 | 0 |
| **2** | | | **2** | | **2** | | **2** | 0.36 | 0.470 | 0 | 0.25 | 0.25 |
| | | | | | | | | | | | | |




La formule de Dittus et Boelter (**1**) s'applique à la circulation d'eau primaire dans le serpentin du ballon préparateur d'eau chaude. L'écoulement est interne, la convection est forcée, le régime est turbulent.

Pour un tube de 2.5 cm de diamètre et un débit d'eau à 80°C de 2 $m^3/h$, le coefficient h vaut 5700 $W.m^{-2}.K^{-1}$.

La formule de Churchill et Chu (**2**) s'applique à la convection naturelle autour du serpentin. L'écoulement est externe, la convection est naturelle, le régime est laminaire.

Pour le tube de 2.5 cm de diamètre et une eau secondaire à 45°C en moyenne, h vaut 780 $W.m^{-2}.K^{-1}$.

La résistance thermique de l'eau qui circule dans le primaire est sept fois plus petite que la résistance thermique de l'eau quasiment au repos accumulée dans le secondaire. En sommant les deux résistances thermiques montées en série et en négligeant la résistance thermique de l'acier du serpentin, on trouve une conductance totale de 680 $W.m^{-2}.K^{-1}$, très proche de notre cahier des charges de 700 $W.m^{-2}.K^{-1}$. Pour développer une surface d'échange de 1 $m^2$, le serpentin comporte par exemple une dizaine de spires de 40 centimètres de diamètre.

Par curiosité, calculons la perte de charge hydraulique du serpentin. Pour dissiper 25 kW thermiques en poussant un débit d'eau primaire de 2 $m^3/h$ à travers les spires, il en coûte 5 W mécaniques, c'est-à-dire trois fois rien. Sans perte de charge hydraulique, point d'échange thermique, c'est Reynolds qui l'affirme. Pour autant, le « levier » énergétique de la convection forcée est une bénédiction pour l'ingénieur qui a besoin de distribuer sans frais de la chaleur…

Le tableau de nombres ci-dessous est une sorte de « preuve par neuf ». Il permet de vérifier la cohérence de toutes les formules citées dans le texte après les formules jumelles de la puissance mécanique et de la puissance thermique.

| | Reynolds **Re** | Grashof **Gr** | Fanning **Cf** | Stanton **St** | Prandtl **Pr** | Nusselt **Nu** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primaire** | 72500 | | 0.0066 | 0.0015 | 2.2 | 240 |
| **Secondaire** | | $7.2\ 10^6$ | | | 3.6 | 33 |

Le ballon accumulateur est un bon moyen de préparer de l'eau chaude sanitaire avant usage. Mais pourquoi ne pas chauffer l'eau instantanément pendant le puisage ?

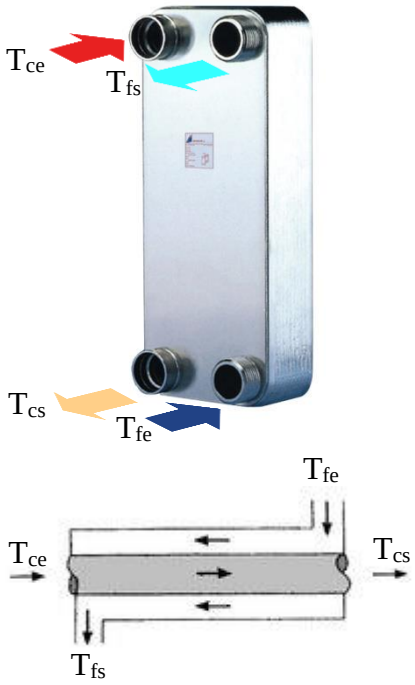
La norme européenne EN13203 décrit les essais auxquelles les fabricants de chaudières murales à gaz doivent procéder pour afficher la « puissance sanitaire » de leurs appareils. Un débit spécifique d'eau chaude sanitaire de 12 litres par minute avec une élévation de température de l'eau de 30°C est un marquage courant. On peut apprécier cette puissance à l'aune d'une combinaison de puisages typiques retenus par la norme. La température de l'eau froide du réseau est 10°C par convention.

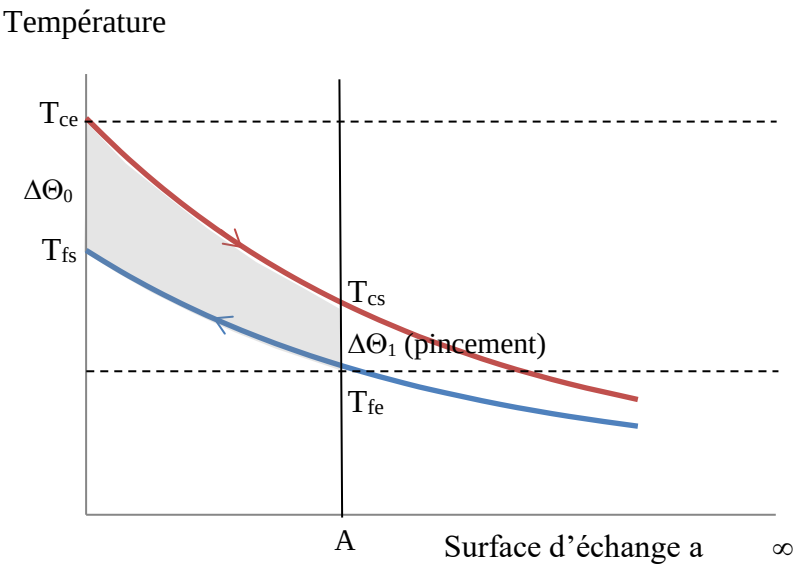
| **Type de puisage** | **Débit à 55°C (Δ = 45)** | **Température souhaitée à l'usage** |
|---|---|---|
| Vaisselle (cuisine) | 4 l/mn | 55°C (Δ = 45) |
| Douche (salle de bain) | 6 l/mn | 40°C (Δ = 30) |
| Bain (salle de bain) | 10 l/mn | 40°C (Δ = 30) |

Un calcul tout simple [(55)] montre que le courant de chaleur qu'il faut injecter dans le réseau d'eau qui alimente la salle de bain et la cuisine est de l'ordre des 25kW de notre chaudière individuelle. Existe-t-il un auxiliaire compact capable de détourner toute la puissance de la chaudière pendant les périodes de puisage ?

L'auxiliaire existe et c'est un composant essentiel des appareils du génie climatique, l'échangeur à plaques. Plus généralement, on désigne comme échangeur de chaleur compact un dispositif qui corrige le défaut du serpentin immergé dans le ballon en utilisant la convection forcée et turbulente à la fois dans le primaire et dans le secondaire.

Pour faciliter la pédagogie on utilise un composant moins répandu commercialement que l'échangeur à plaques mais plus simple à modéliser, l'échangeur bitube. Dès **1955**, deux jeunes professeurs de Stanford, **William Kays** et **Alexander London** écrivent une théorie des échangeurs de chaleurs compacts à l'intention des ingénieurs. Leur méthode baptisée méthode de l'efficacité ou méthode ε - NTU est d'autant plus en vigueur qu'elle se conjugue bien avec la programmation moderne par ordinateur.




| Circuits | Débits de capacité calorifique ($W.K^{-1}$) | Températures | | Courant de chaleur (W) |
|---|---|---|---|---|
| | | Entrée | Sortie | |
| Primaire c (chaudière) | $q_c = (\rho c_p Q)_c$ | $T_{ce}$ (90°C) | $T_{cs}$ ( ?) | $P = q_c (T_{ce} - T_{cs})$ |
| Secondaire f (réseau) | $q_f = (\rho c_p Q)_f$ | $T_{fe}$ (10°C) | $T_{fs}$ (40°C) | $P = q_f (T_{fs} - T_{fe})$ |
| Interface (plaques) | AU | LMTD | | P = AU (LMTD) |

Dans la chaudière mixte instantanée l'eau chaude de départ chaudière se refroidit dans le circuit primaire (indice c) de l'échangeur compact. Elle cède sa chaleur à l'eau froide du réseau qui circule à contrecourant dans le secondaire (indice f). La perte calorifique globale de l'échangeur compact est dérisoire par rapport à la puissance échangée. En régime stationnaire, c'est donc bien le même courant de chaleur qui abandonne le primaire par convection, passe au travers des plaques ou tubes solides par conduction et abonde le secondaire par convection.

Dans le cas de l'échangeur bitube, ce courant de chaleur est proportionnel à la surface comprise entre les deux profils de température longitudinaux soit encore à la surface du quasi trapèze $T_{ce}T_{cs}T_{fe}T_{fs}$.
Parce que les profils sont légèrement incurvés, la surface n'est pas proportionnelle à la moyenne arithmétique des bases du trapèze mais à une moyenne exotique baptisée moyenne logarithmique.

Dans la formule de la puissance, LMTD [(56)] veut dire « Logarithmic Mean Temperature Difference ». C'est une fonction des quatre températures d'entrée et de sortie. A désigne la surface totale d'échange. U est le coefficient global de transfert thermique, une combinaison des coefficients de transfert par convection et du coefficient de conduction de la partie métallique.

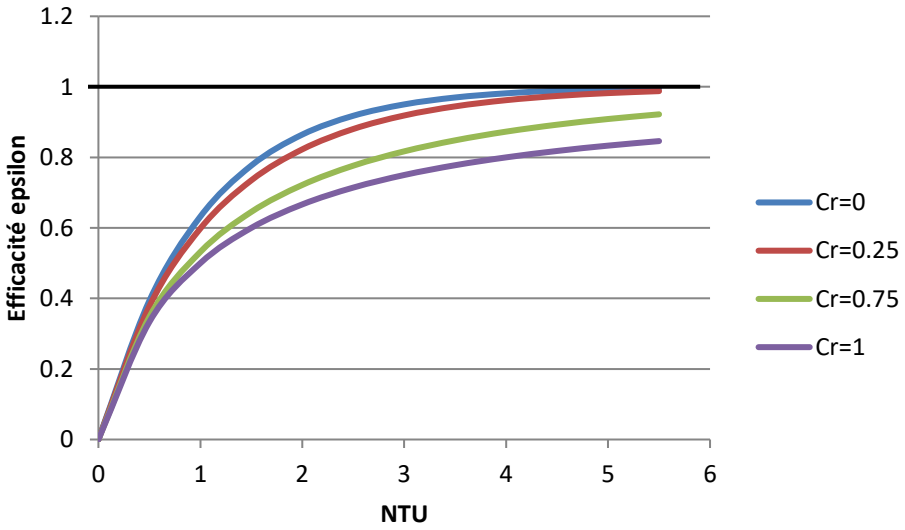
Le Ubât de la réglementation thermique française du bâtiment est strictement de même nature. La consécration de la lettre U est certainement une incitation à voir le bâtiment comme un échangeur thermique (majoritairement air/air).

Si on considère les quatre températures $T_{xx}$ et le courant de chaleur P comme les seules inconnues du problème, on a trois expressions de P pour cinq inconnues, ce qui laisse deux degrés de liberté. Les deux températures d'entrée dans l'échangeur, chaude au primaire et froide au secondaire, fixent donc les deux températures de sortie.

Pour respecter la température d'usage souhaitée pour l'eau chaude sanitaire, on comprend bien qu'il faut un facteur supplémentaire d'ajustement, le débit dans le primaire en provenance de la chaudière par exemple.

Kays et London ont eu le mérite de trouver un changement de variables qui améliore la performance et l'élégance du calcul. Ils inventent trois variables sans dimension, l'efficacité ε, le nombre d'unités de transfert NTU, le rapport de déséquilibre Cr. En régime stationnaire, chacune de ces variables peut s'exprimer comme quotient de deux différences de température [(1)].

Kays et London montrent que, quels que soient les détails constructifs de l'échangeur compact, on peut déterminer une relation ε = f (NTU, Cr) entre les trois variables. Ecrire la formule de l'efficacité ou écrire les trois expressions du courant de chaleur, c'est la même chose. Les fabricants fournissent la formule sous forme d'abaque comme celui-ci.




A débit donné, le NTU mesure grosso modo la taille de l'échangeur, surface des plaques, écartement des plaques, nombre de plaques si c'est un échangeur à plaques. On voit qu'au-delà de 70% à 80% d'efficacité, le gain supplémentaire coûte très cher en taille. La méthode ε - NTU est reconnue pour ses vertus d'optimisation économique.

Dans le NTU il y a le coefficient global d'échange U en watts par mètre carré et par degré. Tout ce qu'on a découvert plus haut sur les échanges thermiques par convection forcée est inclus dans les codes de calcul des bureaux d'étude. Il n'y a rien à renier des Nusselt, Dittus-Boelter et autres Stanton, y compris le conflit entre efficacité thermique et perte de charge hydraulique qui est d'autant plus aigu que l'échangeur est plus compact.

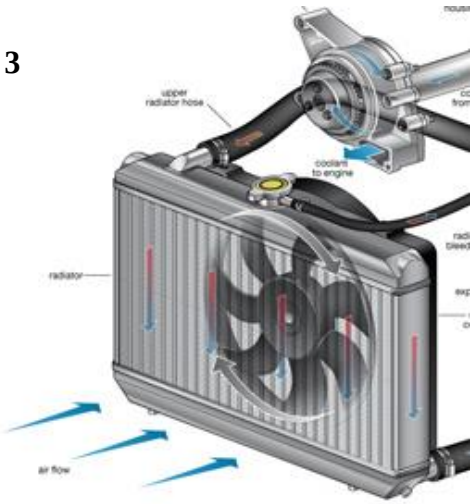
Le cas où le coefficient Cr est nul, c'est-à-dire où l'un des circuits peut absorber ou émettre un courant de chaleur arbitraire, caractérise une gamme d'échangeurs particuliers. Citons l'évaporateur et le condenseur d'une pompe à chaleur ou d'un climatiseur.

D'ailleurs plein d'autres dispositifs thermiques, le radiateur d'automobile, le corps de chauffe de chaudière à flamme, la VMC double flux, sont des échangeurs de chaleur. A vrai dire, si on exclut les dispositifs purement mécaniques (pompes et turbines, orifices, tuyaux, gaines, réservoirs calorifugés) ou purement thermiques (résistances à effet joule, absorbeurs solaires) tout est échangeur de chaleur.

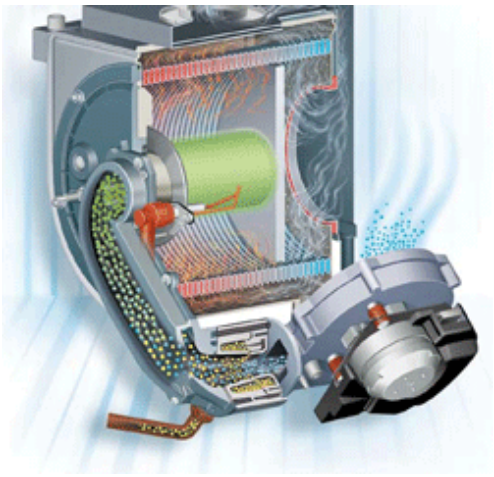
| | | **Fluide circuit chaud** | **Fluide circuit froid** | **P** | **LMTD** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | VMC double flux | Air intérieur | Air extérieur | 1 kW | 5°C |
| 2 | Evaporateur de pompe à chaleur | Air extérieur | Fluide frigorigène | 5 kW | 20°C |
| 3 | Radiateur d'automobile | Eau de circuit moteur | Air extérieur | 15 kW | 50°C |
| 4 | Corps de chauffe chaudière gaz | Gaz de combustion | Eau de chauffage | 25 kW | 400°C |

**2**

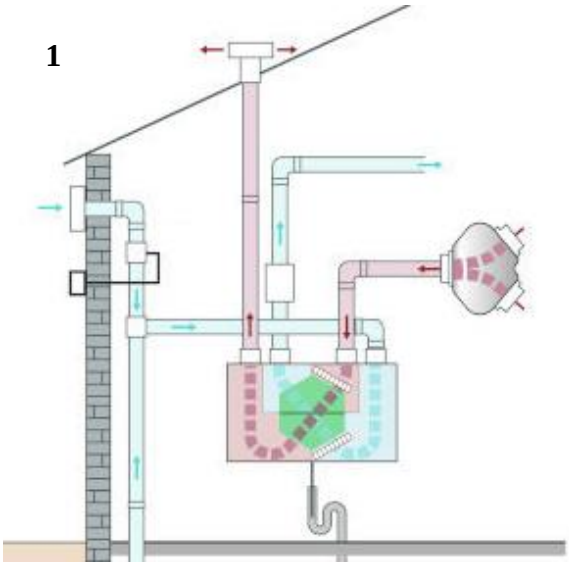
**3**




**4**



**1**



N'a-t-on pas dit que la loi phénoménologique de Newton n'a de sens qu'en régime stationnaire ? Or qui peut défendre qu'une chaudière mixte instantanée fonctionne en régime stationnaire ? Quoi de plus varié que les puisages d'eau chaude d'une famille à la maison ? Tous les dispositifs thermiques illustrés au-dessus connaissent des régimes transitoires fréquents.

*Si les corrélations qui donnent la valeur du coefficient de transfert thermique ne sont robustes que pour les régimes stationnaires, quel est le prix à payer pour l'étude rigoureuse des régimes transitoires ?*

Il ne faut pas déduire, sous prétexte qu'on abandonne la loi de Newton pour les régimes variés, que les bilans de la thermodynamique constituent un problème de physique mal posé. Seule la loi phénoménologique de Fourier est strictement indispensable pour poser les équations de champs en quatre dimensions dont celle de temps.

Si supercherie il y a, elle remonte au serpentin et aux formules jumelles de la puissance mécanique et de la puissance thermique. Dans le cas d'une conduite d'eau en charge, de section constante, les deux équations d'évolution ci-dessous fournissent une description nettement plus complète.

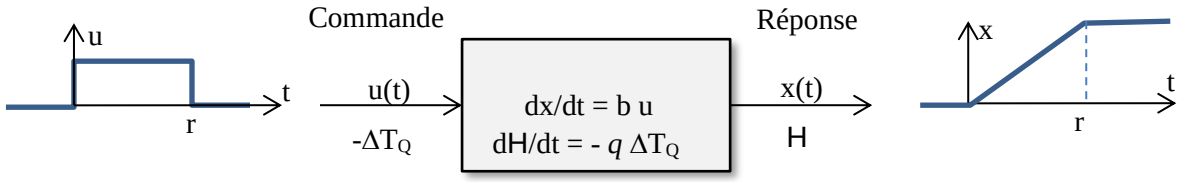
$$\begin{aligned} dQ/dt &= - b\,\Delta H_Q - a\,Q^2 \\ dH/dt &= - q\,\Delta T_Q + P \end{aligned}$$

La première équation [58] décrit le bilan mécanique de l'eau du tuyau avec du frottement et de l'inertie.

La deuxième équation [59] décrit le bilan de chaleur du tuyau. Dans ce cas précis, enthalpie H (en joules) et quantité de chaleur sont synonymes.

Si le tuyau est calorifugé la fuite pariétale de chaleur P est nulle. L'équation de l'enthalpie du tuyau calorifugé est le type d'équation qui fonde l'automatique, une science de l'ingénieur qui prend un essor considérable dans la deuxième moitié du XXe siècle, grâce aux électroniciens notamment.

Dans le jargon des automaticiens, le tuyau calorifugé est un intégrateur pur, le refroidissement ou le réchauffement de l'eau $u = \Delta T_Q = T_s - T_e$ est la commande de l'intégrateur, l'enthalpie de l'eau du tuyau $x = H$ est la réponse de l'intégrateur. Le schéma central ci-dessous s'appelle un bloc [60].




En bon Français, lorsqu'un tronçon de conduite calorifugé voit arriver un piston d'eau chaude (après l'allumage du brûleur de la chaudière par exemple), l'enthalpie du tronçon augmente linéairement jusqu'à ce que tout le tronçon soit réchauffé. La durée r de la rampe est le temps que le front chaud met à parcourir le tronçon de conduite.

Il existe une autre version du bloc, celle où la température d'entrée du tronçon est la commande du bloc et la température de sortie est la réponse. La température de sortie n'est rien d'autre que la température d'entrée décalée dans le temps [61]. On dit que la fonction de transfert d'une conduite calorifugée est un retard pur.

$$T_s(t) = T_e(t - r)$$

Entre le tuyau calorifugé et l'échangeur bitube calorifugé, il n'y a que l'épaisseur d'une paroi conductrice…aussi mince que possible. Tous calculs faits, le bilan de chaleur de l'échangeur en régime transitoire ressemble énormément à celui du tuyau calorifugé avec un terme à droite qui combine les courants de chaleur du primaire (indice c) et du secondaire (indice f).

$$dH/dt = - q_c (T_{cs} - T_{ce}) - q_f (T_{fs} - T_{fe})$$

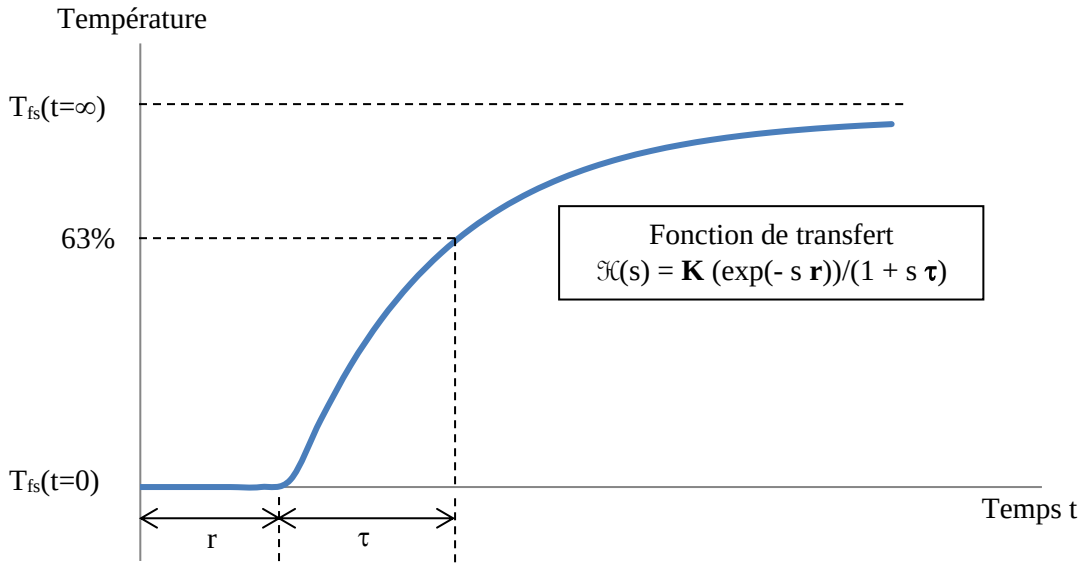
Les débits de capacité calorifique et la température d'eau froide du réseau $T_{fe}$ sont fixés. Comment un piston d'eau chaude arrivant au primaire se répercute-t-il au secondaire ?

On devine qu'en attendant assez longtemps après l'allumage du brûleur et le passage de l'onde chaude dans le primaire, un nouveau régime stationnaire s'établit dans l'échangeur, avec des températures plus chaudes partout, sauf à l'arrivée d'eau froide où la température ne change pas. Il est toutefois impossible que la réponse du secondaire soit un saut brutal de la température $T_{fs}$.

Malheureusement l'équation d'évolution de l'enthalpie ne fournit aucune information. Le bloc est une boîte noire ! L'heure de vérité a-t-elle sonné ? Faut-il finalement payer le prix fort et résoudre les équations de champ complètes en quatre dimensions pour comprendre ce qui se passe pendant la période instationnaire ?

Les automaticiens ont une bonne raison pour ne pas abdiquer. Ils expliquent qu'un échangeur de chaleur possède une fonction de transfert unique. En bon Français, si on connaît la réponse de l'échangeur à une petite augmentation de la commande $T_{ce}$ (réponse indicielle), alors on sait comment l'échangeur réagit à n'importe quelle variation de la température à l'entrée du primaire.

Expérimentalement, il n'est pas bien difficile de fabriquer un petit piston d'eau chaude avec une chaudière à gaz modulante. Les résultats de mesure comblent les automaticiens. En dehors de la commande en échelon $T_{ce}$ et de la température fixe de réseau $T_{fe}$, toutes les réponses indicielles suivent un schéma en deux temps, un temps de retard r et un temps caractéristique $\tau$. Dans leur jargon, les automaticiens disent que l'échangeur est un « système continu du premier ordre plus retard ».




Les mathématiciens préfèrent dire que le bilan de chaleur de l'échangeur est une équation différentielle ordinaire, linéaire, du premier ordre. A chacun ses mots.

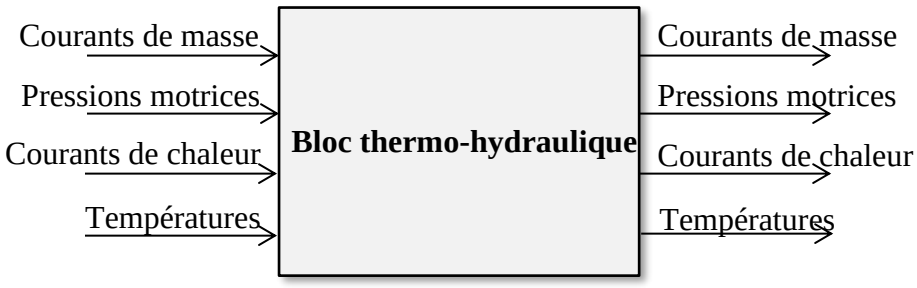
$$dH/dt + H(t)/\tau = q_c\, T_{ce}(t) + \text{constante}$$

Tout cela n'est pas anodin. La norme EN 13203 déjà mentionnée définit le temps d'attente de l'eau chaude au robinet ou à la douche comme critère particulier de confort de l'appareil générateur. Ce temps de réponse a le plus gros poids dans le calcul de la note de qualité de la chaudière (les étoiles de la documentation commerciale).

Dans l'expression de la fonction de transfert de l'échangeur bitube, le gain K se calcule facilement à partir des paramètres NTU et Cr. Le temps de relaxation τ demande un peu plus de sueur mais s'obtient lui aussi comme une fonction compliquée de NTU, ε, $q_f$, $q_c$, des coefficients de convection etc…Seul le temps de retard r est absolument spécifique des régimes transitoires et n'est accessible que par l'expérience.

Finalement Nusselt et les autres n'ont pas perdu leur temps. Une fois admis le comportement temporel peu ou prou linéaire d'un échangeur de chaleur, c'est la théorie de Kays et London qui permet de régler la réponse de l'appareil en dynamique. De noire, la boîte représentant l'échangeur est devenue presque blanche, disons grise.

Ajoutons que les équations différentielles ordinaires, même compliquées et fortement non linéaires comme celles de l'hydraulique filaire, ne rebutent plus les automaticiens. Les échangeurs de chaleur compacts, avec leur « résistance » hydraulique, commencent à figurer dans les librairies de calcul multi-physique des automaticiens. On présente ci-dessous un bloc thermo-hydraulique générique.



Ce long développement à propos des échangeurs de chaleur compacts a un objet plus important encore que la critique des lois phénoménologiques. Il introduit deux méthodes complémentaires de recherche et développement en génie climatique, qu'on appelle de façon volontairement floue, la conception assistée d'une part, la modélisation de systèmes d'autre part.

Le tableau ci-dessous tente de caractériser les deux méthodes. La conception assistée est autonome et hérite d'une longue lignée de physiciens et d'ingénieurs, de Fourier à Prandtl. La modélisation de systèmes a besoin de la conception assistée quand ses blocs sont modélisés par de la physique. Elle hérite d'une lignée de mathématiciens de **Laplace (1749-1827)** à **Lyapunov (1857-1918)**.

| | **Conception assistée** | **Modélisation de système** |
|---|---|---|
| Cibles | Composant individuel | Réseau de composants |
| Spécialités | Hydraulique, thermique | Automatique, traitement de signal |
| Modèles | Equations de champ, modèle filaire, volumes finis,… | Schéma-bloc, réseaux de Kirchoff, graphes de liens… |
| Régimes | Stationnaire | Instationnaire |
| Difficultés | Modèles de turbulence, bifurcations, conditions aux limites, convergence,… | Non linéarité, bifurcations,… |
| Outils | CFD 3D (a) | MBSE (b) |
| Antécédents | CAO | Régulation PID (c) |
| Logiciels | FLUENT, COMSOL, STAR CD | Simulink, AMESim, Dymola, TRNSYS |

(a) Computational Fluid Dynamics
(b) Model-Based Systems Engineering
(c) Proportional Integral Derivative

Tous les spécialistes vous le diront, pour bien concevoir un nouvel appareil, il faut de nombreux allers et retours entre la modélisation du système et la conception assistée de chacun de ses composants.

Dans le modèle initial d'une chaudière mixte instantanée, le corps de chauffe peut être un bloc thermo-hydraulique avec un circuit de gaz et un circuit d'eau.

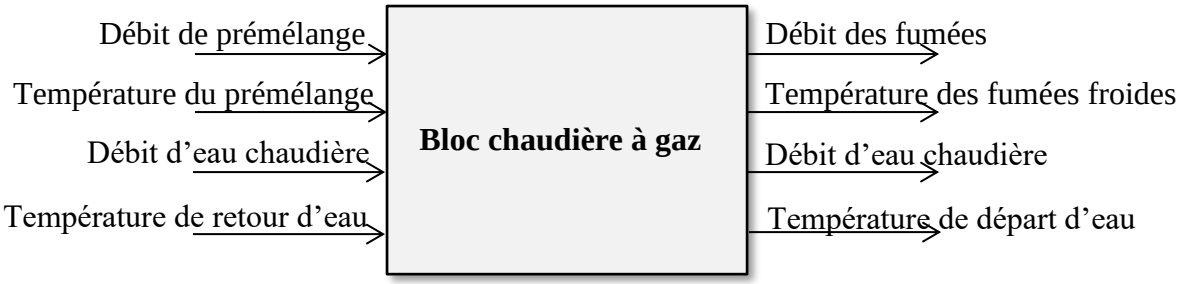
Le débit de masse du circuit de gaz est le même en entrée et en sortie mais la composition chimique du prémélange d'air (80% d'azote $N_2$ + 20% d'oxygène $O_2$ + traces) et de gaz naturel (méthane $CH_4$) est différente de la composition des fumées dans lesquelles on retrouve tous les produits de la combustion ($H_2O$, $CO_2$, NOx, …).

Un mini traité de combustion pour les nuls tient en une ligne.

$$1m^3\ CH_4 + 10m^3\ air \rightarrow 1m^3\ CO_2 + 2m^3\ H_2O + 8m^3\ N_2 + 10kW.h$$

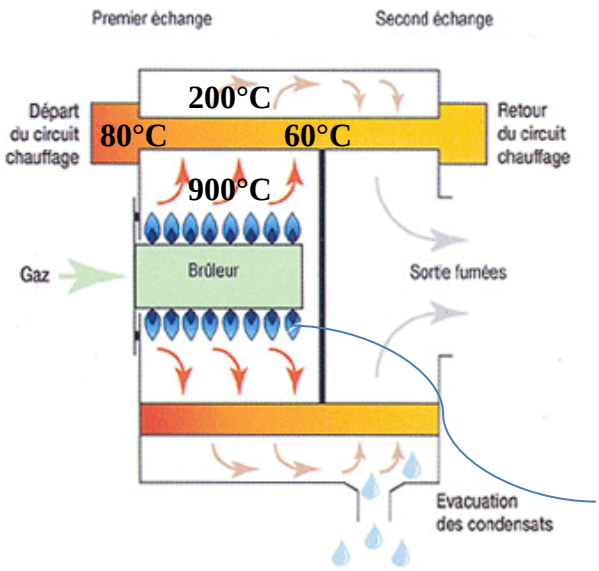
L'énergie dégagée est la chaleur sensible du gaz naturel où pouvoir calorifique inférieur (PCI). L'équation n'est correcte que si l'eau reste à l'état de vapeur, c'est à dire tant que la température des fumées reste supérieure à une soixantaine de degrés [(62)], la température de rosée. En-dessous, les fumées condensent et on récupère la chaleur latente (grosso modo 10% d'énergie résiduelle).

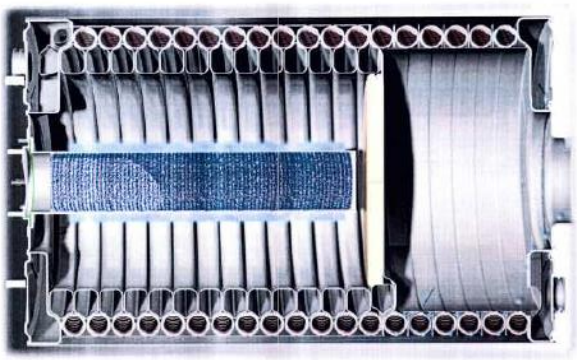
Compte tenu de la quantité d'azote des deux côtés de l'équation, on peut, en toute première approximation considérer que le débit de capacité calorifique des fumées froides est le même que le débit de capacité calorifique des gaz frais.




Dans ces conditions le bilan de chaleur du bloc chaudière s'écrit pratiquement comme un bilan d'échangeur. La différence tient évidemment au terme de production de chaleur de combustion $P_b$.

$$dH/dt = - P_f - P_u + P_b$$
$$P_f = q_{gaz} \ (T_{\text{sortie fumées}} - T_{\text{air ambiant}})$$
$$P_u = q_{eau} \ (T_{\text{eau départ}} - T_{\text{eau retour}})$$



**Flamme bleue > 1200°C**

Le prémélange comporte toujours un petit excès d'air pour être sûr qu'un maximum de gaz naturel est brûlé. Dans ces conditions la puissance de combustion de la chaudière est le débit de gaz multiplié par le pouvoir calorifique inférieur du gaz.

$$P_b \text{ en kW} = \text{Débit en } m^3/h \times \text{PCI en } kW.h/m^3$$

Le quotient $P_u/P_b$ de la puissance utile de chauffage de l'eau $P_u$ par la puissance de combustion $P_b$ mesure un rendement.

La détermination précise de ce rendement est l'objet d'une discipline scientifique relativement récente, l'aérothermochimie ou « turbulent combustion » en Anglais.

L'esprit critique suggère alors une nouvelle interrogation.

*La chimie, en plus des lois phénoménologiques de la thermique des fluides, suffit-elle à comprendre le plus fantasque des éléments d'Aristote, le feu ? La puissance thermique dégagée par l'oxydation du gaz naturel est-elle intégralement récupérée par convection des produits de combustion ?*

Après quelques cycles de conception du corps de chauffe de la chaudière, on s'intéresse au détail de l'échange entre les gaz de combustion et les tubes d'eau. Côté gaz, le débit de capacité calorifique poussé par le brûleur est faible, la différence de température est énorme, plusieurs centaines de degrés. Côté eau, le débit de capacité calorifique poussé par la pompe de circulation est élevé, la différence de température est petite, quelques dizaines de degrés tout au plus.

L'échangeur « à courants croisés » de la chaudière peut être étudié avec un outil de CFD 3D comme FLUENT, ou, plus succinctement avec la méthode de Kays et London.

Quelle que soit la méthode employée, le compte n'y est pas. La convection est incapable d'expliquer la totalité de la puissance thermique transférée des gaz de combustion vers le circuit d'eau.

On peut dire que l'origine du déficit est connue depuis l'aube de l'humanité. C'est la même origine que la chaleur rayonnée par l'incendie de forêt, le feu de cheminée ou bien sûr notre bon vieux soleil. Le lecteur averti a pu s'offusquer de cette impasse dans l'exposé sur le radiateur acier et la norme EN442. Le terme radiateur lui-même évoque un courant de chaleur sans déplacement d'air. Mais quelle proportion de la puissance thermique totale du panneau est-elle transmise par rayonnement ?

En dépit de son omniprésence, le rayonnement comme « chose en soi » échappe complètement à la sagacité des Anciens qui évoquent vaguement une propriété du feu et de l'air. Comme ils sont pardonnables ! Après plusieurs siècles de pure phénoménologie avec les miroirs, la lunette astronomique, la loupe, le prisme et toutes les merveilles de l'optique, le rayonnement ne trouve véritablement ses marques scientifiques qu'au XIXe et au XXe siècle.

Le rayonnement thermique, le plus universel mais aussi le plus complexe des rayonnements électromagnétiques, n'est vraiment élucidé qu'au XXe siècle et fait encore le bonheur des théoriciens de ce début de millénaire. Le rayonnement thermique n'est pas la seule forme de rayonnement électromagnétique. Les lois de l'électromagnétisme ont été établies à partir de dispositifs totalement artificiels impliquant de forts courants électriques, de la dynamo jusqu'au radar. Quant à la couleur bleue de la flamme du gaz naturel elle provient de la chimiluminescence des radicaux CH, pas de la température de combustion.

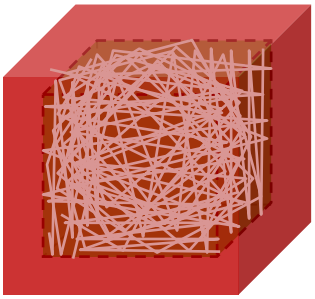
Dans l'abondante pédagogie sur les transferts thermiques, le rayonnement est présenté comme le troisième moyen de transport de la chaleur après la conduction et la convection. Cependant, alors que les deux premiers phénomènes sont des déplacements de porteurs matériels de chaleur (molécules, électrons, phonons), le troisième est désormais reconnu comme propriété du vide.

## Rayonnement…

*Peut-on récupérer quelque chose de la théorie des porteurs de chaleur et du cube de cuivre abordée au tout début de l'exposé ou faut-il, pour comprendre le rayonnement thermique, changer radicalement de physique ?*

On devine aujourd'hui que rayonnement et matière sont sortis d'une même « soupe » initiale, au moment du Big Bang. Cette genèse commune aide à accepter l'incroyable unité de la physique moderne. La revue des concepts de la thermostatique et de la TPI à l'occasion de l'étude du rayonnement thermique est une coquetterie de l'exposé.

Pour appréhender le rayonnement thermique comme une propriété du vide en présence de matière condensée, on fait une expérience de pensée. On excave un cube de cuivre de façon à aménager à l'intérieur une cavité étanche, elle aussi en forme de cube, et vide de toute molécule de gaz.



Si on trouve le moyen de porter l'enceinte de cuivre au zéro absolu, la cavité constitue la cellule la plus sombre qu'on puisse imaginer, l'antre de Diana [(63)]. A quelques degrés Kelvin, une pâle lueur (invisible à l'œil) envahit la cavité. A 1073°K (800°C) la cavité accueille Lucifer [(63)] et « rougeoie » avec entrain.

La lueur qui envahit la cavité est composée d'ondes stationnaires qui sont des solutions de l'équation de **Maxwell (1831-1879)** pour les champs électriques et magnétiques confinés à l'intérieur d'une enceinte conductrice. La solution la plus générale est une superposition de modes propres ou harmoniques, un peu comme les vibrations sonores à l'intérieur de la caisse d'une guitare. Chaque harmonique est caractérisée par un vecteur d'onde **k** à trois dimensions fixant une direction de propagation. La grandeur du vecteur **k** est liée à la pulsation ω de l'harmonique (la hauteur du son en musique) par la relation de dispersion du vide qui fait intervenir la vitesse de la lumière.

$$\mathbf{k}^2c^2 = \omega^2$$

c vitesse de la lumière = $3.10^8$ $ms^{-1}$

Le nombre des harmoniques qui composent la lumière dans la cavité est infini. Plus précisément il y a une triple infinité dénombrable de vecteurs d'onde **k**.

Les équations de Maxwell ne s'opposent pas à cette infinité et ne s'opposent pas non plus à ce que l'amplitude de chaque harmonique (le volume du son en musique) soit parfaitement arbitraire et reste inchangée au cours du temps. Imaginez un orchestre en train de s'accorder, avant l'arrivée du chef.

Pendant tout le XIXe siècle, les physiciens acquièrent au contraire la conviction que l'orchestre est rigoureusement dirigé. A condition que la température de l'enceinte reste stable, l'amplitude de chaque harmonique est fixée.

Les physiciens ont pris l'habitude de mesurer la densité d'énergie électromagnétique par intervalle de fréquence [1] dans la cavité ($u_\nu$ en Joule par $m^3$ et par Hertz) en fonction de la fréquence $\nu$ ce qui est plus accessible que l'amplitude de chaque mode propre. Assénons directement le résultat, établi par **Planck (1858-1947)** à la fin de l'année **1900**.

$$u_\nu/(8\pi h(\nu/c)^3) = 1/(\exp(h\nu/k_B T) - 1)$$

$k_B = 1.38\ 10^{-23}$ J/K, constante de Boltzmann
h= $6.626\ 10^{-34}$ J.s, constante de Planck

L'expression sans dimension à droite du signe égal n'est pas la distribution statistique de Fermi-Dirac qui s'applique aux électrons libres de l'enceinte en cuivre à la température T. L'air de parenté quand on écrit $E = h\nu$ est néanmoins bien troublant.

Jouons à nous répéter.

1. *D'où vient qu'on doive passer aux statistiques alors que les équations des ondes électromagnétiques sont parfaitement déterministes ?*
2. *D'où diable peut bien sortir une formule aussi ésotérique que celle de la distribution de Planck ? Qu'est-ce que des radiations se propageant dans le vide ont en commun avec la température du métal ?*
3. *En quoi le rayonnement d'équilibre à l'intérieur d'une enceinte isotherme fermée nous aide-t-il à comprendre pourquoi la façade du radiateur acier et la flamme du brûleur gaz transmettent de la chaleur autrement que par convection ?*

Le bon cadre théorique pour le rayonnement libre de la cavité à l'intérieur du cube de cuivre est la théorie quantique des champs [2]. Dans la théorie quantique du rayonnement libre, chaque mode propre électromagnétique est un sous-système quantique qualifié d'oscillateur harmonique. Le rayonnement global est une juxtaposition d'oscillateurs harmoniques, la configuration emblématique de la théorie quantique des champs.

Les états permis d'un oscillateur harmonique de fréquence $\nu$ engendrent une échelle de niveaux énergétiques dont les barreaux successifs sont séparés du même quantum d'énergie $h\nu$.

$$E_1 = 1.5\ h\nu,\ E_2 = 2.5\ h\nu, \ldots,\ E_{100} = 100.5\ h\nu, \ldots,\ E_n = (n + ½)\ h\nu, \ldots$$

Tout se passe comme si l'énergie d'une harmonique était celle d'une collection de grains de rayonnement parfaitement interchangeables (à moins que ce ne soient des brins), grains que la communauté scientifique appelle photons à partir de **1926**.

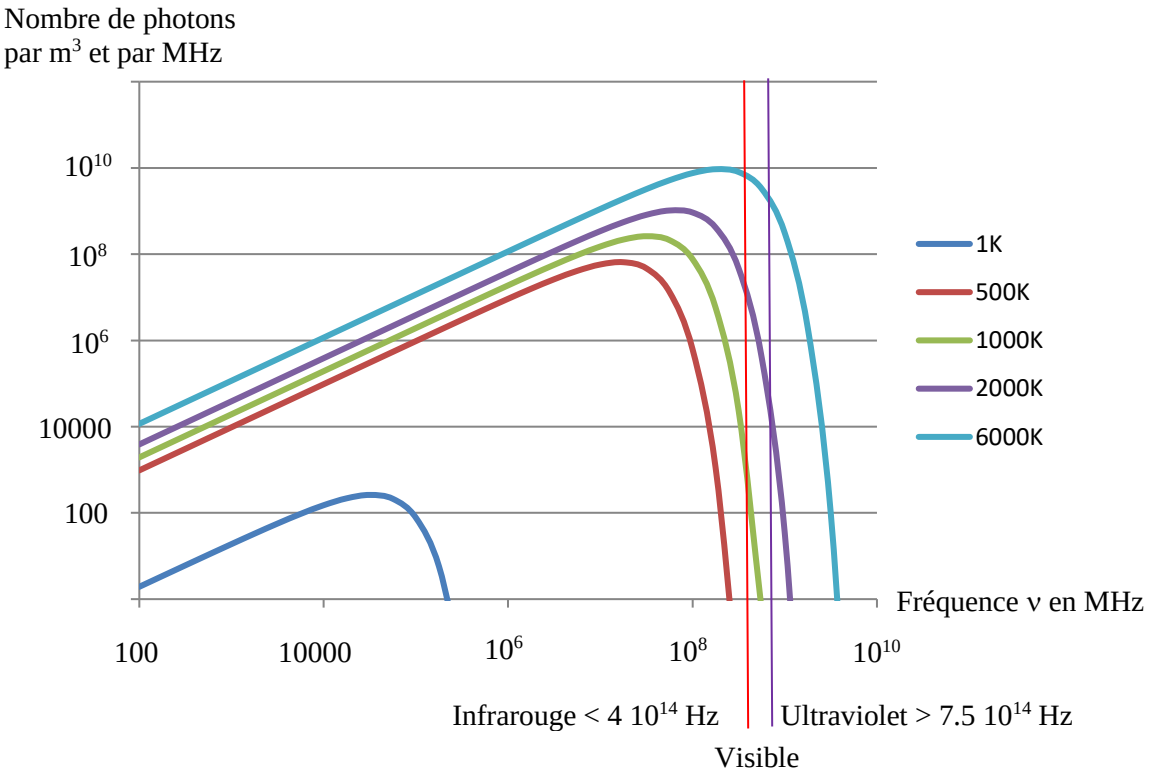
Le fait qu'un champ à zéro photon ait une énergie résiduelle non nulle est une facétie du vide quantique.

Le nombre sans dimension de la formule de Planck s'interprète statistiquement comme le nombre moyen de photons $\langle N_{\mathbf{k}} \rangle$ d'une harmonique de vecteur d'onde **k** (donc de fréquence $\nu$ donnée par la relation de dispersion du vide). La statistique de Planck a des propriétés de convergence miraculeuses. Quand on fait la somme sur la triple infinité des harmoniques de la cavité, on trouve un nombre total de photons fini et surtout une énergie totale finie.

$$\sum \langle N_{\mathbf{k}} \rangle = N,\ \sum \langle N_{\mathbf{k}} \rangle\ h\nu = \langle E \rangle \text{ - énergie du vide}$$

Le présent exposé débute avec deux gaz quantiques infiltrant la partie cristalline du cube de cuivre, un gaz d'électrons libres et un gaz de phonons. Ces deux gaz fournissent les porteurs de chaleur du métal. Voici un troisième gaz exotique qui remplit le vide laissé par l'excavation, un gaz de photons. Le physicien indien **Bose (1894-1974)** suggère l'expression gaz de photons en **1924**.

Contrairement aux électrons de conduction, le nombre total de photons n'est pas une donnée du problème. Il peut être petit mais en général il est colossal. Une astuce mathématique permet de calculer une très bonne approximation du nombre d'harmoniques compris dans un intervalle de un hertz autour d'une fréquence ν quelconque. Cela permet de fabriquer une courbe de population de photons en fonction de la fréquence pour chaque température absolue.




Quand la cavité « rougeoie » à la température de 1000K, on constate que la grande majorité des photons sont dans l'infrarouge et que la probabilité de trouver un photon violet est nulle. Au maximum de la courbe T = 1000K, les photons ont une densité supérieure à 100 millions par mètre cube et par mégahertz.

*D'où vient qu'on doive passer aux statistiques ?*

Parler de gaz de photons, de taux d'occupation de niveau énergétique, de valeur moyenne d'énergie implique une forme de chaos et des fluctuations autour d'un régime d'équilibre.

Un grand nombre de corpuscules est une condition nécessaire du chaos mais n'est pas une condition suffisante. Pour atteindre un équilibre il faut ajouter un mécanisme d'interaction entre corpuscules, des lieux de collisions directes ou indirectes où le surplus cinétique des uns se déverse dans la cinétique des autres jusqu'à trouver une configuration de probabilité maximum.

Or, aussi bien dans la théorie classique que dans la théorie quantique, les ondes électromagnétiques ou les photons dans le vide se superposent et se croisent sans jamais s'influencer.

Dans le rayonnement d'équilibre du vide, seules les parois solides peuvent assurer l'orchestration. Le détail des interactions entre les photons du vide et les charges électriques du matériau des parois est complexe. La théorie visite plusieurs secteurs de la physique suivant que le matériau est conducteur ou isolant, cristallin ou amorphe, lisse ou rugueux. Néanmoins l'existence même d'interactions avec la matière dense suffit à justifier la thermalisation des photons et le recours à la physique statistique.

*D'où diable peut bien sortir une formule aussi ésotérique que celle de la distribution de Planck ?*

On recopie la formule barbare du début de l'exposé, pour les photons de la cavité électromagnétique en lieu et place des électrons libres du cube de cuivre.

$$U_\varphi = Tr\ H_\varphi \exp(-\beta H_\varphi) / Tr \exp(-\beta H_\varphi)$$

Tous calculs faits, quand on compare l'expression de l'énergie moyenne des photons $U_\varphi$ à la formule $\sum <N_k> h\nu = <E>$, postulée plus haut, on tombe sur la statistique de Planck pour le remplissage des niveaux $<N_k>$, exprimée avec le multiplicateur statistique $\beta$.

Pourquoi pas la statistique de Fermi-Dirac à nouveau ? Parce que le nombre de photon n'est pas imposé au départ et parce que les photons sont des bosons, corpuscules non soumis au principe d'exclusion de **Pauli (1900 – 1958)**. On peut agglutiner autant de photons que l'on veut sur un même état quantique.

Pour autant, rien n'empêche de dérouler pour les photons de la cavité la même thermostatique que pour les électrons, les phonons ou les molécules, et de former une fonction de de partition Z et une énergie libre de Helmholtz F, fonctions du multiplicateur $\beta$ et du volume V de la cavité.

$$F = -(1/\beta)\ LogZ = -(1/3) bV\beta^{-4},\ b \text{ constante}$$

De F on déduit tout le reste, l'entropie S des photons, leur énergie interne U et même leur pression p !

$$U = bV\beta^{-4}$$

*Qu'est-ce que des radiations se propageant dans le vide ont en commun avec la température du métal ?*

Par construction, le spectre des fréquences dans la cavité est un quasi continuum, depuis les fréquences les plus basses [(66)], jusqu'à la fréquence d'extinction du rayonnement thermique [(66)] (coupure de **Wien**). En outre le gaz de photons remplit parfaitement la cavité, à toutes les fréquences.

Il s'en suit qu'on peut intégrer la formule de Planck dans tout l'espace géométrique et sur toutes les fréquences. Avec une intégrale dont les mathématiciens ont le secret, on trouve la loi de **Stefan (1835-1893)**.

$$U = aVT^4$$
$$a = 7.56\ 10^{-16}\ J.K^{-4}.m^{-3}$$

La loi phénoménologique de **Stefan** joue donc un rôle analogue aux lois de **Dulong** et de **Mariotte**. Elle établit la correspondance entre le multiplicateur $\beta$ de la statistique et la température absolue T.

Le lien entre rayonnement et température est plus qu'un résultat d'expérience. Il est inscrit dans l'histoire et le progrès technique avec la forge, l'ampoule à incandescence, la soudure à l'arc etc…

Il revient cependant au grand **Einstein** de proposer, dans sa communication « Zur Quantentheorie der Strahlung » de **1917**, un mécanisme d'interaction entre le rayonnement et la matière qui fonde toute la pédagogie moderne sur le sujet.

Einstein imagine que les photons sont simultanément absorbés et réémis par la matière en proportion des boltzmanions qui constituent la paroi et de la densité de photons dans la cavité. Une émission spontanée de photons, en proportion exclusivement des boltzmanions excités, complète le mécanisme et assure l'équilibre énergétique [67].

Les coefficients d'Einstein expliquent la statistique de Planck, pourquoi l'exponentielle de cette statistique est la même que l'exponentielle de la statistique de Boltzmann et finalement pourquoi la température du rayonnement est la même que la température des parois.

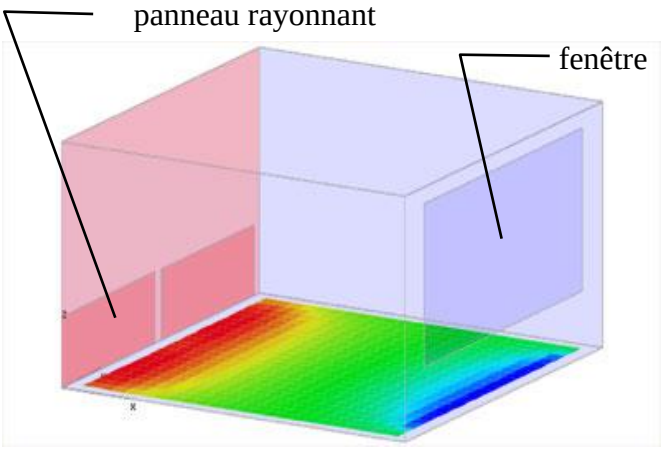
*En quoi le rayonnement d'équilibre à l'intérieur d'une enceinte isotherme fermée nous aide-t-il à comprendre pourquoi la façade du radiateur transmet de la chaleur autrement que par convection ?*

Avec la théorie de l'électron, la théorie du rayonnement thermique d'équilibre « fabrique » la mécanique quantique. Mais pour le moment, elle nous est parfaitement inutile.

Méfions-nous des idées reçues. Un plancher chauffant à 25°C, installé dans une pièce dont les murs et le plafond sont à 25°C, n'émet rien du tout. Le rayonnement d'équilibre ne transfère pas le moindre milliwatt de puissance thermique.

Pire, le rayonnement thermique d'équilibre stocke, aux températures courantes du génie climatique, une quantité d'énergie dérisoire. Si les caissons hermétiques en acier et aluminium du radiateur électrique ci-dessous sont en équilibre thermique à moins de 100°C, l'énergie totale du gaz de photons piégé dans les caissons ne dépasse pas un demi-micro joule !

Où trouver les centaines de watts diffusés par rayonnement dans la pièce à chauffer et vantés par la documentation commerciale ?




Si la façade du radiateur projette tant de rayonnement dans la pièce, c'est que le rayonnement dans la pièce est incontestablement hors d'équilibre. L'effet de l'air sur la propagation des ondes électromagnétiques est supposé négligeable par rapport au vide. Le déséquilibre du rayonnement dans la pièce ne peut provenir que des écarts de température avec et entre les murs.

Qui dit système hors d'équilibre dit irréversibilité et équation de bilan.

*Mais bilan de quoi dans le cas d'ondes électromagnétiques ? Que peut-être une équation de transport hydrodynamique de photons, corpuscules sans masse se déplaçant à la vitesse de la lumière ?*

Cette partie de la théorie, nommée théorie du transfert radiatif, vit sur des acquis anciens remontant au XVIIIe siècle comme le traité « photometria » du mathématicien astronome **Lambert (1728-1777)** [68].

La densité spectrale d'énergie électromagnétique $u_\nu$ estime le nombre de photons de fréquence $\nu$ par mètre cube et par Herz, se trouvant quelque part dans la pièce.

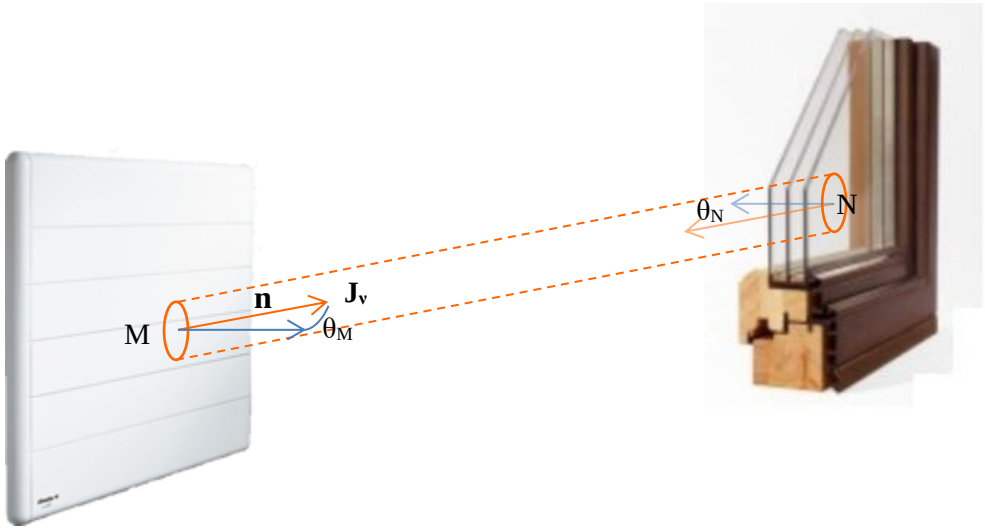
L'intensité spécifique $I_\nu$ estime quelle part de ces photons voyage dans la direction spécifique **n**. En voyageant à la vitesse de la lumière ces photons engendrent un micro-courant de lumière monochromatique $\mathbf{J}_\nu$ dans la direction **n**.

| Champs | Symbole | Paramètres | Unité [69] | Relation |
|---|---|---|---|---|
| Densité spectrale d'énergie e.m. | $u_\nu$ | $\mathbf{x}(x,y,z)$, $\nu$, t | $J.m^{-3}.Hz^{-1}$ | $u_\nu = (1/c) \int I_\nu \, d\Omega$ |
| Intensité spécifique (brillance) | $I_\nu$ | $\mathbf{x}(x,y,z)$, $\nu$, $\mathbf{n}(\theta,\varphi)$, t | $W.m^{-2}.Hz^{-1}.sr^{-1}$ | |
| Densité spectrale de courant | $\mathbf{J}_\nu$ | $\mathbf{x}(x,y,z)$, $\nu$, $\mathbf{n}(\theta,\varphi)$, t | $W.m^{-2}.Hz^{-1}.sr^{-1}$ | $\mathbf{J}_\nu = I_\nu \, \mathbf{n}$ |

Un résultat d'électromagnétisme classique [70] permet d'écrire l'équation de transport des photons voyageant dans le vide (ou dans l'air de la pièce) dans la direction **n**.

$$(1/c) \, \partial I_\nu / \partial t + \mathrm{div} \, \mathbf{J}_\nu = 0$$

Dans le vide, la lumière se propage en ligne droite. Supposons, en outre, que les températures varient suffisamment lentement avec le temps pour parler de régime stationnaire. La formule du micro-courant de lumière et l'équation de transport montrent que l'intensité spécifique $I_\nu$, encore appelée brillance, est une constante de la demi-droite de vecteur directeur **n** qui passe par le point fixe M.



Dans l'exemple ci-dessus le micro-courant de photons infrarouge qui part de la façade du radiateur en M à la température $T_M$, se retrouve intégralement (71) sur le vitrage de la fenêtre en N à la température $T_N < T_M$.

Mais que peut bien valoir ce micro-courant ?

A priori, c'est une fonction de $\nu$, $T_M$, $T_N$, des angles $\theta_M$, $\theta_N$, de l'aluminium de la façade, du verre du vitrage donc d'à peu près tout sauf de la longueur de vide MN. Ce qu'il nous faut, c'est une condition de bord pour l'équation de transport de l'intensité spécifique, un peu comme la loi de refroidissement de Newton pour le transport de la chaleur par convection.

Comme seul point de départ, nous avons le cas de la maison, au printemps, avec tous ses murs à 293K (20°C), radiateurs à l'arrêt et soleil caché par les nuages ! La densité spectrale d'énergie $u_\nu$ est donnée par la formule de Planck et l'intensité spécifique est isotrope et vaut :

$$I_\nu(T) = (c/4\pi)\, u_\nu(T) = B_\nu(T)$$

**Kirchoff (1824-1887)** débloque la situation en inventant un matériau virtuel, le corps noir. Equilibre ou pas, la brillance à la surface « libre » du corps noir est l'intensité spécifique de Planck [72]. Par pure convention, tout matériau réel est jaugé par rapport au corps noir.

$$I_\nu(\mathbf{x},\nu,\mathbf{n}) = \varepsilon(\mathbf{x},T(\mathbf{x}),\nu,\mathbf{n})\, B_\nu(T(\mathbf{x}))$$

**x** désigne un point M de la façade, **n** est une direction,
$\nu$ est une fréquence, T(**x**) est la température au point M
$B_\nu(T)$ est la brillance du corps noir à T

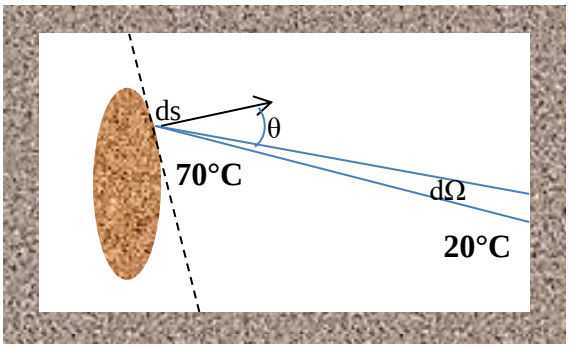
L'émissivité $\varepsilon$ dépend des mêmes paramètres géométriques et spectraux que l'intensité spécifique en espace libre mais aussi de facteurs propres à la surface émettrice (nature chimique, température, rugosité…).

Kirchoff évite de justesse une belle tautologie. Il précise en effet que la plupart des matériaux réels, raisonnablement opaques et mats, ont une émissivité égale à un. S'il dit vrai, sa première loi devient en revanche une véritable aubaine pour les ingénieurs.

Quand les murs, la fenêtre, la façade du radiateur sont assimilés à des corps noirs, l'équation de transport du rayonnement a une solution rayon par rayon.

En outre, on calcule facilement le micro-courant net du radiateur vers la fenêtre comme somme du micro-courant $B_\nu(T_M)\mathbf{n}$ et du micro-courant en sens inverse $-B_\nu(T_N)\mathbf{n}$.

Simplifions encore. Disons que le radiateur est un corps noir convexe de surface totale S à la température $T_w$ = 70°C et que tous les murs, plancher et plafond de la pièce à chauffer sont des corps noirs à $T_\infty$ = 20°C. On calcule le solde de puissance radiative $P_R$ rayonné par le radiateur, en watts.




$$P_R = \int (B_\nu(T_w) - B_\nu(T_\infty))\, d\nu\, d\Omega\, \cos\theta\, ds$$

L'intégrale miraculeuse fournit la formulation la plus usitée de la loi de **Stefan-Boltzman**.

$$P_R = S\,\sigma\,((T_w)^4 - (T_\infty)^4)$$
$$\sigma = ac/4 = 5.67\ 10^{-8}\ W.K^{-4}.m^{-2}$$

Donnons les ordres de grandeur des puissances thermiques fournies par un radiateur panneau de 1m de large, 0.7m de haut avec des ailettes de type T11, dans une ambiance à 20°C, en régime stationnaire.

| **Température de façade** | **70°C** | | **50°C** | | **Formule employée (74)** |
|---|---|---|---|---|---|
| Rayonnement (73) $P_R$ | 400W | 36% | 220W | 39% | Corps noir |
| Convection externe | 140W | 13% | 70W | 12% | Externe laminaire |
| Convection interne | 560W | 51% | 280W | 49% | |
| Puissance totale P | 1100W | 100% | 570W | 100% | $P_{50}$, n = 1.3 |

Donnons en outre une allure plus newtonienne à la formule de la puissance radiative du radiateur panneau.

$$P_R = S\,h_R\,(T_w - T_\infty)$$

$h_R$, un polynôme du troisième degré des deux variables $T_w$ et $T_\infty$, est assimilé à une constante dans laquelle on reconnait un coefficient de transfert thermique de 6 à 7 watt par mètre carré et par degré pour une ambiance à 20°C.

A titre de comparaison, le coefficient $h_L$ pour la convection libre externe le long de la façade du même panneau vaut de 3 à 4 $W.m^{-2}.K^{-1}$.

On brise facilement la belle harmonie entre **Stefan** et **Newton** en notant que les murs de l'enceinte et l'air de l'enceinte ne sont pas forcément en équilibre thermique. Dans ce cas, la température lointaine $T_\infty^{air}$ de la convection est différente de la température lointaine $T_\infty^{murs}$ (on dit aussi température radiante) du rayonnement.

Dans un logement l'occupant humain est une sorte de radiateur mobile, corps convexe à environ 32°C, qui, sans effort, apporte une petite centaine de watts de chaleur sensible au logement, par rayonnement et par convection.

Pour le confort de l'occupant, la norme européenne et internationale EN ISO 7726 définit une température opérative dont une bonne approximation est la moyenne arithmétique de la température radiante et de la température de l'air.

$$T_\infty^{op} = (T_\infty^{air} + T_\infty^{murs})/2$$

Revenons au radiateur panneau. Les tenants de la « chaleur douce » (rayonnement basse température) veulent sûrement savoir si on peut faire mieux que le corps noir et rayonner plus sans augmenter la température de façade.

Avant tout commentaire exhibons une table d'émissivité de matériaux courants en génie climatique.

| Matériau | Surface ou type | ε |
|---|---|---|
| Acier | poli | 0.15 |
| | oxydé | 0.8 |
| Aluminium | poli | 0.06 |
| | oxydé | 0.3 |
| Cuivre | poli | 0.04 |
| | oxydé | 0.75 |
| Peinture | métallisée | 0.3 – 0.6 |
| | blanche | 0.8 |
| | toutes couleurs | 0.9 |
| Bois | | 0.75-0.95 |
| Béton | | 0.9 |
| Brique | rouge | 0.93 |
| Verre | ordinaire | 0.94 |
| Marbre | blanc | 0.95 |
| Papier | | 0.95 |
| Carbone | graphite | 0.98 |
| Peau humaine | | 0.98 |

Kirchoff a vu juste. Presque tous les matériaux non métalliques émettent à plus de 90% comme un corps noir, y compris le verre ordinaire de la fenêtre. Seuls les métaux polis émettent nettement moins.

Coup dur pour la chaleur douce, aucun matériau n'émet plus que le corps noir.

Pour expliquer tous ces mystères, on doit d'abord rappeler les notions, pas si désuètes que ça, de l'optique géométrique.

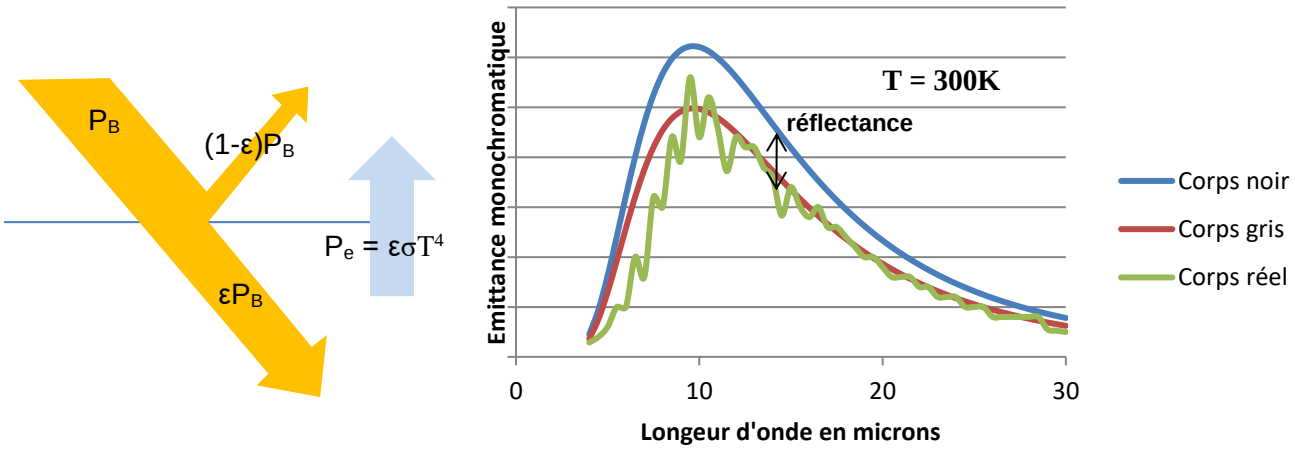
La réflexion ou effet miroir sur une face plane d'un solide est un phénomène d'interférence constructive ou de résonance purement géométrique entre les ondes électromagnétiques et les micro-courants électriques induits sur la « peau » du miroir.

Le rayonnement réfléchi et sa contrepartie dans le rayonnement incident doivent être exclus du bilan pour retrouver la pureté du mécanisme d'absorption-émission d'Einstein. Le bilan de puissance complet pour un mètre carré de surface d'un solide opaque et convexe, placé à l'intérieur d'une enceinte en équilibre radiatif à la température T, figure ci-dessous.

| $P_x$ | $P_B$ incidente = $\sigma T^4$ | $P_r$ réfléchie | $P_a$ absorbée | $P_e$ émise | $P_R$ radiative = $P_e - P_a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_x/P_B$ | 1 | $0 \leq \rho = 1 - \varepsilon < 1$ | $0 < \varepsilon \leq 1$ | $\varepsilon$ | 0 |

L'égalité [75] de l'émissivité et de l'absorptivité est une nouvelle intuition de Kirchoff qu'on appelle deuxième loi de Kirchoff et dont on trouve la justification dans les profondeurs quantiques du mécanisme d'Einstein.

Hors d'équilibre, la puissance radiative $P_R$ n'est plus nulle. Sa valeur provient des déséquilibres de température entre les solides en présence. On admet que l'émissivité locale, paramètre macroscopique de la surface opaque, reste inchangée. La preuve est à chercher du côté d'un énorme théorème de physique statistique, de facture récente, le Théorème de Fluctuation Dissipation (FDT, **Callen 1951**).



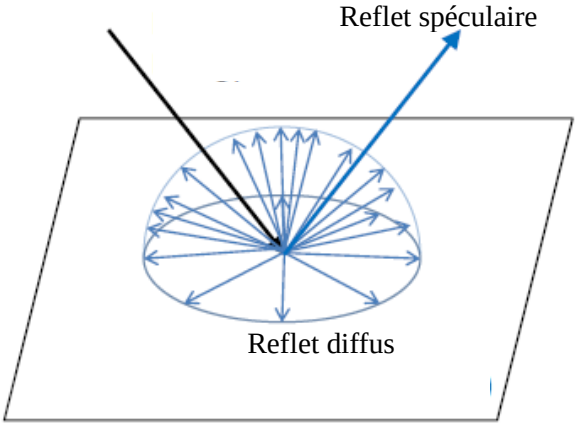

Accessoirement, l'émissivité ε est le complément à un de la réflectivité ρ, une grandeur versatile qui dépend de tout et de la longueur d'onde en particulier. Un corps gris est un corps partiellement réfléchissant dont la réflectivité est indépendante de la longueur d'onde.

Attention ! La couleur physiologique perçue par l'œil est hors sujet. Le spectre solaire (T = 5800K) est dramatiquement hors d'équilibre avec le rayonnement thermique ambiant. En architecture climatique, les apports thermiques de l'ensoleillement sont traités comme une source bien spécifique appelée rayonnement CLO (Courte Longueur d'Onde).

*La nature est-elle si complaisante que le chaos photonique se résume à la statistique de Planck et que la dissipation thermique par rayonnement électromagnétique suive une loi aussi rustique que la loi de refroidissement du bol de soupe chaude ?*

Deux effets viennent singulièrement compliquer le calcul rigoureux des échanges radiatifs à l'intérieur d'une enceinte :

- les faces intérieures de l'enceinte ne sont pas toutes à la même température,
- les surfaces en jeu ne sont pas noires mais au mieux grises et une fraction du rayonnement « rebondit » de face en face.



La brillance totale d'une surface au point M, dans la direction **n**, est la somme de la brillance d'équilibre thermique local et d'un reflet au point M qui dépend de tout l'hémisphère vu par le point M. Dans le terme de reflet, l'indicatrice [76] de réflexion $f_v(\mathbf{n},\mathbf{n'})$ mesure le reflet de l'incidence **n'** dans la direction **n**.

$$I_v(\mathbf{n}) = \varepsilon B_v(T) + \int f_v(\mathbf{n},\mathbf{n'})\, I_v(\mathbf{n'})\, d\mathbf{n'}$$

Kirchoff — reflet

On fait l'impasse sur la réflexion spéculaire des miroirs qui est une rareté. La grande majorité des objets usuels ont une surface (ou subsurface) suffisamment chaotique pour diffuser le rayonnement dans toutes les directions. L'indicatrice se réduit alors à une constante proportionnelle à la réflectivité.

Dans ce cas, la méthode de calcul dite de la radiosité fait référence. La première étape est le maillage de surface des objets de la scène. Chaque maille ou facette d'aire A est homogène en brillance ce qui permet de raisonner en courant de chaleur (P en watts) pour chaque facette d'indice i.

$$P_i = \varepsilon_i B(T_i) A_i + \rho_i \sum F_{ij} P_j \text{ où } \rho_i = 1 - \varepsilon_i$$

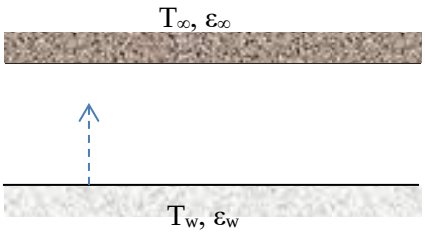
Kirchoff — reflet

Les coefficients F forment le tableau carré des facteurs de forme ou facteurs de vue. Ces coefficients ne dépendent que de la disposition des facettes dans l'espace. La géométrie des scènes réelles est rapidement si compliquée que les ingénieurs calculent les facteurs de forme en jouant aux fléchettes avec des rayons lumineux qu'ils tirent au hasard. C'est la méthode de Monte-Carlo.

Chassez les statistiques, elles reviennent au galop !

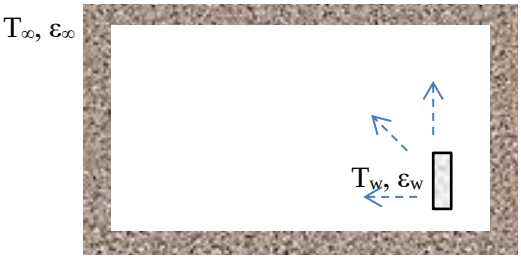
Pour conclure, on indique deux scènes simplistes mais utiles pour lesquelles la formule de la puissance radiative (courant de chaleur net) de Stefan-Boltzmann reste acceptable à condition de la corriger par un facteur d'émissivité ε [77] plus petit que un.

$$P_R = S\, \varepsilon\, \sigma\, ((T_w)^4 - (T_\infty)^4)$$
$$\varepsilon\sigma < 5.67\ 10^{-8}\ W.K^{-4}.m^{-2}$$




$\varepsilon = \varepsilon_w\varepsilon_\infty/(1-(1-\varepsilon_w)(1-\varepsilon_\infty))$

**Plans parallèles infinis**

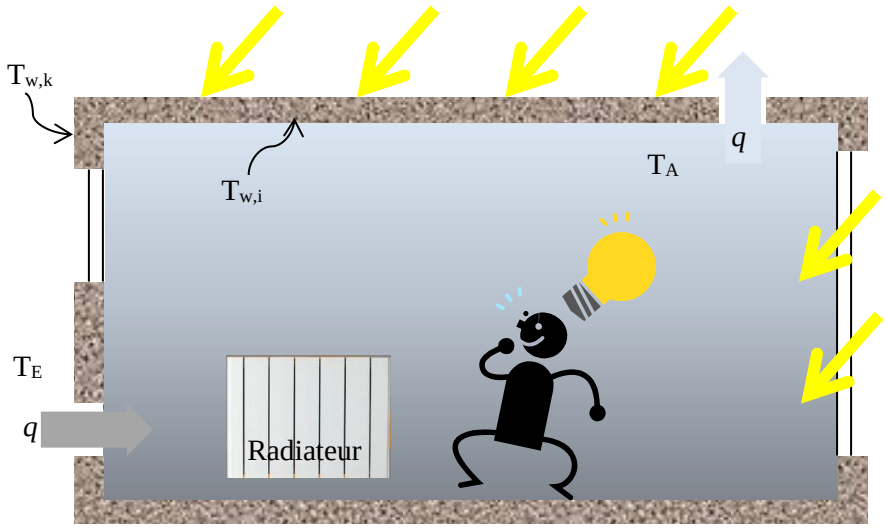



$\varepsilon \cong \varepsilon_w$

**Emetteur convexe dans une enceinte de grande taille**

Le deuxième cas est celui des salles d'essais des émetteurs panneaux imposées par la réglementation. Rappelons néanmoins, et ce n'est pas seulement un divertissement scientifique, que la puissance radiative d'un panneau rayonnant dans un local réel dépend des murs, des ouvertures, de la disposition des meubles et des occupants !

Armé d'un logiciel de calcul de la radiosité (ou plus simplement d'une formule de Stefan-Boltzmann), et de tout ce qu'on a glané sur la conduction et la convection, on peut désormais s'attaquer au bilan de chaleur complet d'un local d'habitation.




0n commence par diviser le local en deux sous-systèmes, un volume aéraulique et une enveloppe d'épaisseur variable, à savoir les murs, planchers et plafonds. Les parois internes de l'enveloppe forment la frontière du volume aéraulique.

Une approche moderne consiste à mailler l'épaisseur des parois avec un grand nombre d'éléments finis à trois dimensions, quelque chose comme des parpaings virtuels qui permettent de calculer une solution de Fourier dynamique dans la masse [78] de l'enveloppe. A l'intérieur comme à l'extérieur, les faces planes des « parpaings » fournissent les facettes sur lesquelles on écrit les conditions des échanges radiatifs et convectifs.

On donne en annexe A1 le tableau des sous-systèmes et des équations qu'un moteur de calcul moderne doit résoudre, dans le cas d'un volume d'air non stratifié.

On constate que la conductibilité de l'enveloppe et la conductance totale du bâti ont disparu du modèle.

En régime transitoire, c'est la diffusivité du matériau des murs ($\alpha$ en $m^2/s$), qui apparaît dans les équations. La diffusivité est le quotient de la conductivité du matériau par sa chaleur volumique.

*Faut-il donc changer de propriété de matériau pertinente dès qu'on parle de confort et de réponse en température ? Ou encore affirmer que les matériaux de construction courants donnent tous à peu près le même confort [79] ?*

Il y a un piège ! La conductivité ($\lambda$ en watt par mètre et par degré) est aussi présente dans l'expression des courants de chaleur qui traversent les faces intérieures et extérieures des murs. L'étude des réponses en température d'un local d'habitation est impossible avec une seule propriété de matériau [80].

Quelles sont les forces instationnaires agissant sur notre maquette de logement ?

- La puissance électrique en watts injectée dans le radiateur.
- La puissance en watts dégagée par les occupants et les appareils ménagers.
- Le débit de capacité calorifique de la ventilation si c'est une VMC.
- La température extérieure en fonction de la météo.

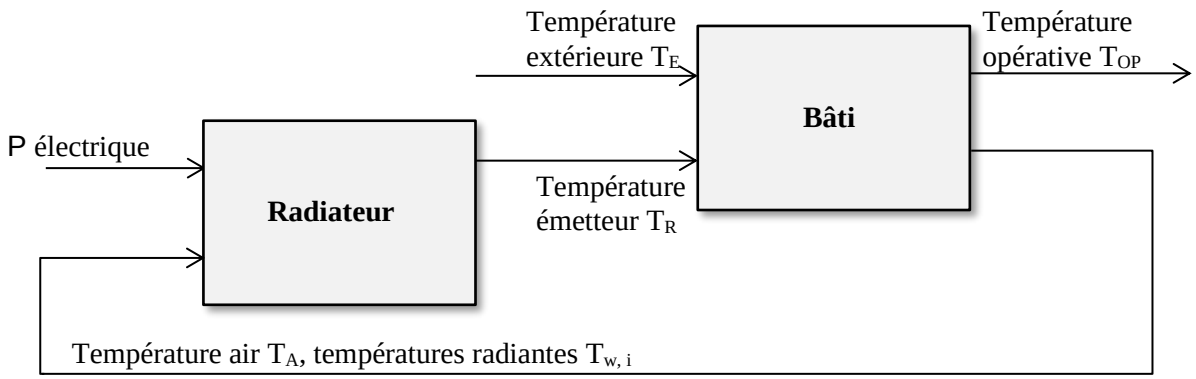
En contradiction avec le croquis de la maquette et par souci de simplification, on fait l'impasse sur les apports solaires, comme si on était en période de nuit, et sur les usages comme si le logement était inoccupé. En outre on fixe le débit de la VMC. Croqués par un automaticien, le local et le moteur de calcul simplifiés donnent une boîte blanche à deux entrées et une sortie.

Ce bloc est presque correct si le radiateur est un convecteur pur qui n'a d'influence que sur le volume aéraulique. Dans le cas d'un émetteur plus moderne comme un radiateur électrique à fluide caloporteur, la puissance électrique se distribue entre variation d'enthalpie du fluide et de la coque, puissance radiative et puissance convective. Le tableau ci-dessous résume l'équation du radiateur. On admet qu'une seule variable $T_R$ représente valablement les températures de fluide, de façades et d'ailettes dans le calcul de l'enthalpie et des courants de chaleur.

Sous-système : **radiateur**
EDO enthalpie : $dH_R/dt$ = P électrique - courant de chaleur sortant
Schéma numérique : Euler et suivants

| **Courant de chaleur** | **Températures en jeu** | **Formulation** | **h ($W.m^{-2}.K^{-1}$)** |
|---|---|---|---|
| Rayonnement | Façade $T_R$, $\sum$Faces $T_{w,i}$ | Radiosité | |
| Convection | Air ambiant $T_A$ | Newton | Constructeur |
| | Façade $T_R$, Ailettes $T_R$ | | |

L'automaticien préfère isoler le bâti et le radiateur (plus généralement le bloc CVC Chauffage, Ventilation, Conditionnement d'air) en deux blocs séparés même si les calculs doivent être menés de front.

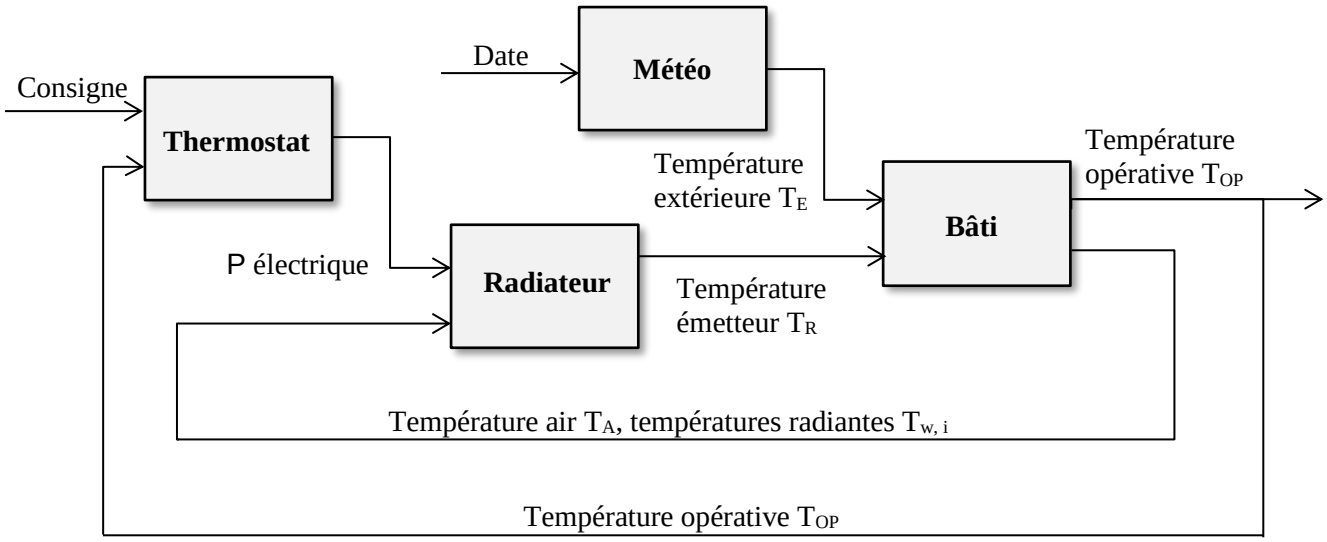


Quelle puissance électrique injecter dans le radiateur pour maintenir une température opérative de 20°C dans le local ?

Pourquoi ne pas installer une sonde de température extérieure, un gradateur de puissance électrique et un ordinateur pour traiter les équations en temps réel et régler la puissance électrique?

Les constructeurs écartent un tel réglage en boucle ouverte parce qu'il induit autant de versions de logiciel que de locaux d'habitation. Les constructeurs préfèrent une régulation en boucle fermée. Un thermostat TOR (Tout Ou Rien) ou PI (Proportionnel Intégral) règle la puissance électrique en fonction de l'écart mesuré entre la température opérative et la consigne de 20°C.

Pour faire bonne mesure, on peut ajouter au système une connexion à un serveur informatique de données météorologiques locales. Le système au complet peut ressembler au schéma ci-dessous.




Précisons l'équation d'un radiateur électrique à inertie et à thermostat électronique à commande proportionnelle et intégrale (PI). L'écart entre la puissance électrique injectée et la puissance thermique dégagée (convection et rayonnement) donne le taux de chaleur stockée dans le radiateur. La consigne de température opérative est 20°C.

$$dH_R/dt = P_E - P_L - P_R$$

Variation d'enthalpie

Puissance radiative

Puissance convective

Puissance électrique

$$dH_R/dt = m\ c_p\ (dT_R/dt) = C\ (dT_R/dt)$$

$$P_E = P_{E\ t=0} + K\ ((20 - T_{OP}) + (1/\tau) \int_0^t (20 - T_{OP})\ dt)$$

*Quel est l'intérêt de la capacité thermique C ajoutée par construction dans un radiateur à inertie ?*

La puissance électrique $P_E$ est réglée à une fraction de la puissance nominale de l'appareil par des cycles de marche et d'arrêt. Le taux de chauffe instantané (ou taux de marche, temps de contact fermé/durée du cycle) correspond à la fraction de puissance requise par le thermostat pour atteindre une température opérative de 20°C en partant d'une consigne inférieure ou pour corriger les effets d'une perturbation météo.

**Corps de chauffe à ailettes en fonte**

**Corps de chauffe à fluide et ailettes en aluminium**

La puissance électrique injectée, les températures de corps de chauffe et les courants de chaleur sont donc des grandeurs cycliques. On connaît bien les effets d'un couple résistance (R) capacité (C) sur les variables cycliques d'un système en fonction du temps caractéristique du système.

- Si la période de cycle est nettement plus grande que le temps caractéristique du radiateur, l'effet est un déphasage entre la puissance injectée et les courants de chaleur. Le radiateur chauffe le local après avoir été coupé…et ne le chauffe pas tout de suite après avoir été allumé.
- Si la période de cycle est nettement plus petite que le temps caractéristique du radiateur, l'effet est un lissage des courants de chaleur. Le radiateur ne provoque pas d'ondes de chaleur malgré la commutation de puissance électrique par le thermostat.

Les fabricants ont au moins deux bonnes raisons de concevoir des radiateurs à corps de chauffe inertiels. Le temps caractéristique de ces radiateurs est de l'ordre de quelques minutes à une trentaine de minutes [(81)].

- Le lissage permet, à taux de marche donné, d'allonger la durée de cycle et de réduire le rythme de la commutation. C'est tout bénéfice pour la durée de vie du cœur de chauffe et de l'électronique.
- La théorie des ailettes de refroidissement montre qu'un radiateur à ailettes est d'autant plus efficace que sa température est homogène. Or les matériaux qui distribuent le mieux la chaleur sont les métaux diffusifs comme l'aluminium et la fonte, ou les fluides en mouvement comme l'eau et l'huile, tous matériaux qui se trouvent avoir une chaleur massique élevée.

Meilleure durée de vie, meilleure efficacité, cela signifie objectivement une meilleure qualité d'appareil pour le consommateur. Le gain de confort obtenu par déphasage des courants de chaleur apparaît nettement plus subjectif…

L'influence du bâti gomme toutefois une grande partie des différences savamment mises au point entre les émetteurs de chauffage. C'est une vérité difficile à accepter pour un fabricant.

La réglementation thermique française RT 2012, en dépit de sa complexité, n'est pas faîte pour rasséréner les industriels. Le moteur Th-BCE [(82)] de calcul de la réglementation utilise un modèle dynamique de comportement du bâti sollicité par le soleil et la météorologie. C'est un programme bioclimatique qui cible les architectes plus que les industriels du CVC.

L'étude du radiateur électrique n'épuise pas les questions concernant le rayonnement thermique.

*En quoi le rayonnement d'équilibre à l'intérieur d'une enceinte isotherme nous aide-t-il à comprendre pourquoi la flamme du brûleur gaz transmet de la chaleur autrement que par convection ?*

Dans des conditions normales, l'air est transparent au rayonnement électromagnétique, tout comme le vide. C'est parce que les molécules diatomiques d'azote ($N_2$) et d'oxygène ($O_2$) sont parfaitement neutres électriquement et que les photons les ignorent.

Dans une enceinte de combustion de gaz naturel, les produits de combustion émettent et absorbent le rayonnement électromagnétique [(83)]. C'est parce que les molécules triatomiques de vapeur d'eau ($H_2O$) et de dioxyde de carbone ($CO_2$) sont des oscillateurs électriques qui réagissent avec les photons. Ce sont les fameux Gaz à Effet de Serre ou GES.

En présence de GES, l'équation de transport des photons dans le vide doit être modifiée pour ajouter des sources et des puits de photons distribués dans le volume de gaz traversé. On écrit, sans démonstration, l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) qui décrit la variation de la brillance des gaz dans toutes les directions de propagation possibles. Cette version, applicable aux fumées sans suie, est attribuée à **Schwarzchild (1873-1916)**.

$$\mathrm{div}(I_\nu \mathbf{.n}) = \kappa\,(B_\nu(T) - I_\nu), \text{ pour toutes les directions } \mathbf{n}$$

Variation suivant **n**

Absorption par les fumées

Emission par les fumées

Dans la conception assistée d'un foyer de chaudière à gaz par exemple, le rayonnement des parois comme celui des gaz à effet de serre rallonge la liste des cinq bilans de la thermodynamique des écoulements turbulents.

Le cinquième bilan, celui de la chaleur, doit être corrigé pour introduire une source répartie propre au gaz de photons. Cette contribution fait l'objet d'un sixième calcul, l'équation du transfert radiatif, à résoudre dans l'enceinte du foyer. La résolution rigoureuse de l'ETR pose un problème de géométrie qui n'est pas hors de portée des calculateurs modernes.

Le jeu en vaut-il la chandelle ?

Comme Colebrook et White pour la friction, ou Dittus et Boelter pour la convection, **Hottel (1903-1998)**, professeur au MIT connu pour ses travaux sur l'énergie solaire, propose une phénoménologie et des corrélations pour le rayonnement thermique des GES.

Pour Hottel, si la masse gazeuse est raisonnablement homogène et isotherme, et avec un peu d'indulgence mathématique, la résolution des équations du transfert radiatif aboutit à une formule de Stefan-Boltzmann corrigée.

Les émissions de toutes les molécules de GES qui remplissent le foyer se cumulent. A proximité immédiate des tubes d'eau qui tapissent les parois du foyer le rayonnement résultant est celui d'un corps gris opaque dont Hottel définit l'émissivité $\varepsilon_g$. L'émissivité des GES de combustion est petite, comparable à celle de l'acier des tubes inox.

Le modèle de Hottel s'applique au régime de combustion dit « flamme bleue », flamme très chaude et brûleur froid. Aux faibles régimes qu'on rencontre dans certaines chaudières modulantes, la flamme pénètre dans le brûleur et le foyer passe en mode « radiant », flamme et brûleur chauds. L'émissivité du brûleur incandescent devient prépondérante et c'est un modèle classique de radiosité qui s'applique.

**Brûleur en mode flamme bleue**

**Brûleur en mode radiant**

Le tableau ci-dessous montre qu'on peut négliger le rayonnement dans les échanges thermiques du mode flamme bleue, du moins à pleine puissance.

Certains constructeurs plaident d'ailleurs pour maintenir le mode flamme bleue le plus longtemps possible quand le débit de gaz diminue.

| | **Mode flamme bleue** | **Mode radiant** |
|---|---|---|
| Température du brûleur | < 500 K | > 1100 K |
| Température des gaz de combustion | > 1200 K | < 1000 K |
| Formulation | Stefan Boltzmann (Parois du foyer) | Radiosité (Espace annulaire du foyer) |
| Emissivité ε | 0.1 – 0.2 ($CO_2$ + $H_20$) | 0.2 – 0.8 (acier inox) |
| Puissance totale | 20000W (100% charge) | 4000W (20% charge) |
| Puissance radiative | 500W | 1000W |
| P radiative/ P totale | 2.5% | 25% |

*Doit-on s'inquiéter d'une répartition du courant de chaleur entre convection et rayonnement alors que le volume d'eau autour du foyer capte la somme des deux c'est à dire la puissance utile de la chaudière ? Sait-on calculer cette puissance utile à partir de la puissance de combustion fournie par le brûleur ? Le rendement de la chaudière est-il le seul enjeu de la combustion ?*

## Combustion…

Impossible de répondre à ces questions sans la contribution des chimistes. L'un des plus célèbres d'entre eux, le suédois **Arrhenius (1859 - 1927)** nous apprend au moins deux choses.

- A température ambiante, la combustion est infiniment lente, façon de dire que le gaz naturel ne s'enflamme pas spontanément dans l'air.
- Au-dessus de la température d'inflammation (630 °C), la combustion s'auto accélère c'est-à-dire qu'elle est d'autant plus rapide que la température des gaz augmente.

On rappelle la formule chimique de la combustion d'un prémélange de gaz naturel et d'air en proportion stœchiométrique.

| $CH_4$ + | $2\,(O_2 + 3.76\,N_2) \rightarrow$ | $CO_2$ + | $2\,H_2O$ + | $7.52\,N_2$ + | h |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 g | 274 g | 44 g | 36 g | 210 g | 800 kJ |

$[CH_4]$ est la concentration molaire de méthane en nombre de moles par mètre cube de gaz. La loi d'Arrhenius exprime la cinétique de la réaction en fonction de la température. Elle donne la vitesse de disparition du méthane qui est aussi le taux de la réaction.

$$d\omega/dt = - d[CH_4]/dt = (B[CH_4][O_2])\exp(-E_a/k_BT)$$

Fréquence de collision
[CH4], [O2] concentration des réactifs
B facteur de fréquence (84)

Facteur d'efficacité de Boltzmann
$E_a$ = énergie d'activation moléculaire
$k_B$ constante de Boltzmann

Grâce aux 800 kJ/mole de la réaction exothermique le taux de réaction $d\omega/dt$ est facilement converti en vitesse spécifique de dégagement de chaleur en watts par mètre cube.

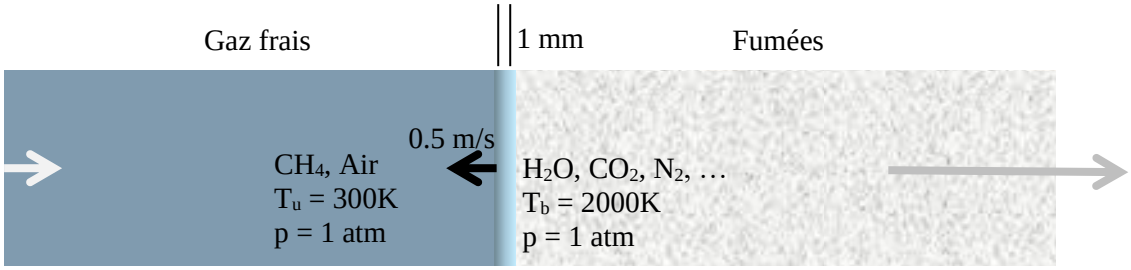
Arrhenius suit les cours de Boltzmann à l'université de Graz. Pour autant, les chimistes ne font le lien qu'après la mort des deux savants, en comprenant que l'oxydation d'une molécule de méthane implique une collision particulièrement violente avec au moins une molécule d'oxygène. Le terme exponentiel d'Arrhenius traduit l'accélération du nombre de collisions efficaces avec la température. Il est une conséquence directe de la distribution statistique des vitesses des molécules de réactifs.

Afin de mieux assurer la sécurité dans les mines, d'autres chimistes célèbres, **Mallard (1833 – 1894)** et (Henri) **Le Chatelier (1850 – 1936)**, étudient la géométrie et la cinématique d'une flamme.

Qu'est-ce qu'une flamme dans un mélange gazeux combustible?

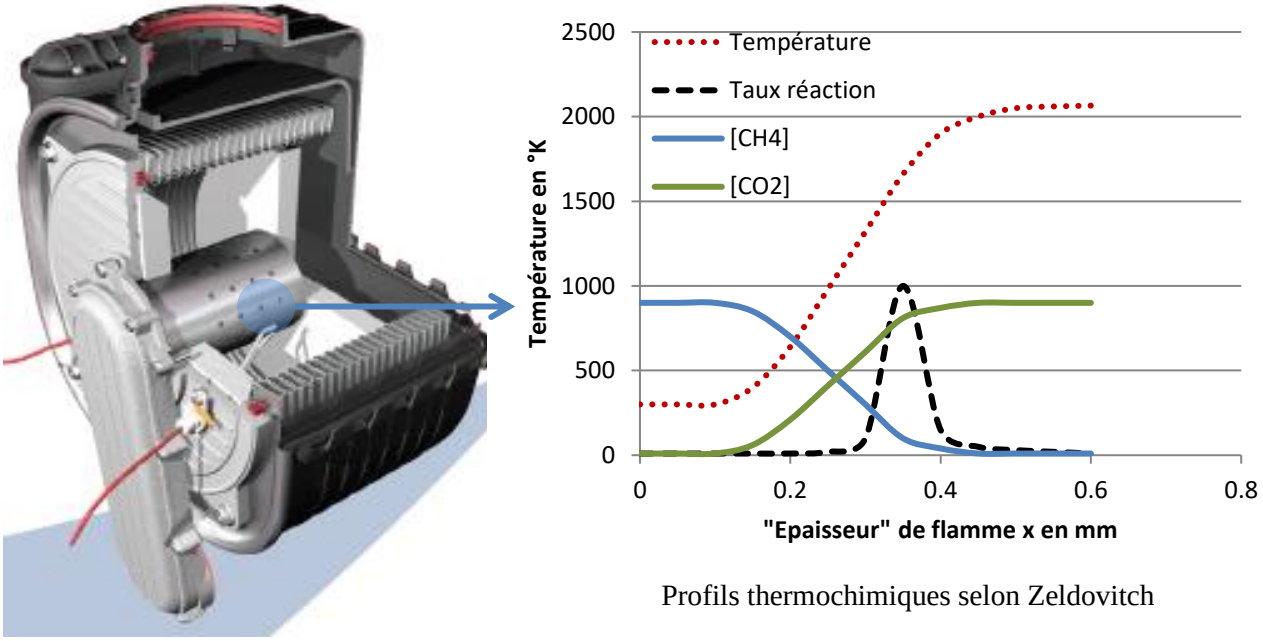
Une flamme est une déflagration, c'est-à-dire une onde de composition chimique, de température, de masse volumique, mais pas de pression (pas d'onde de choc) à la différence d'une détonation.

Au-dessus de la température d'inflammation, la réaction est brutale et son temps caractéristique très court, cent microsecondes. La vitesse de propagation de l'onde est nettement subsonique, un demi mètre par seconde. L'un dans l'autre, l'épaisseur de la zone de réaction est celle d'une feuille de papier à cigarettes, cinquante microns.




L'épaisseur totale de la flamme, en comptant une tranche de préchauffage des gaz frais en amont de la tranche de réaction, est de l'ordre du millimètre. Cette épaisseur n'a rien à voir avec l'étirement visible de la flamme en sortie de brûleur. Retenons néanmoins qu'une flamme n'est stable, c'est-à-dire stationnaire par rapport au brûleur, que si la vitesse de sortie des gaz frais équilibre exactement la vitesse de propagation de la flamme à contrecourant.

Comme la température absolue des fumées est six fois plus élevée que celle du prémélange, les fumées sont six fois plus « légères » et leur vitesse d'éjection peut atteindre plusieurs mètres par seconde.




Profils thermochimiques selon Zeldovitch

**Zeldovitch (1914-1987)** conduit jusqu'au bout les calculs initiés par Mallard et Le Chatelier et associe son nom à la théorie des flammes de prémélange laminaires. Il combine

- la cinétique chimique d'Arrhenius,
- la diffusion thermique de Fourier qui préchauffe les gaz frais au contact des fumées chaudes,
- la diffusion moléculaire de Fick qui alimente la zone de réaction en réactifs préchauffés,
- le bilan énergétique global qui est facile à faire pour un volume de contrôle aussi mince. La flamme est adiabatique. Les 800kJ de la réaction exothermique servent exclusivement à élever la température de 290 grammes de gaz, de la température ambiante des gaz frais 300K à la température théorique des fumées 2300K [(85)].

Tous calculs faits, Zeldovitch trouve une formule explicite pour la vitesse de flamme laminaire $S_L$.

C'est assez inattendu mais le demi-mètre par seconde est une propriété du prémélange stœchiométrique, influencée seulement par la température des gaz frais et un peu par la pression [86].

Le résultat de Zeldovitch est une mauvaise nouvelle pour l'ingénieur.

Avec une flamme laminaire aussi nonchalante, la jupe perforée du brûleur cylindrique des chaudières murales domestiques (120 mm de long, 60 mm de diamètre, porosité de 15%) dégage à peine 5 kW si la flamme est plane, au mieux 10 kW si la flamme est plissée.

La jupe perforée agit toutefois comme une grille de turbulence et, grâce à la turbulence, l'ingénieur peut augmenter le débit de combustible sans souffler la flamme. La turbulence multiplie significativement les plis de la surface de combustion, ce qui revient à postuler une vitesse de flamme turbulente nettement supérieure à la vitesse de flamme laminaire, $S_T > S_L$.

La feuille de papier à cigarettes est toujours là, mais elle est complètement chiffonnée…

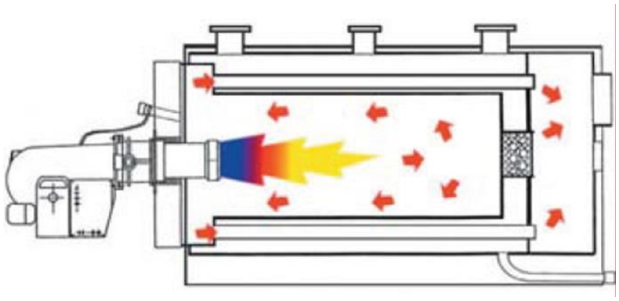
Admirez la logique. Tant que les molécules gouvernent, c'est **Arrhenius**, le chimiste, qui fait la loi. Quand le « turbulent » revient et contrôle le taux de la réaction, c'est **Spalding**, le pionnier de la CFD et Pape du modèle k-ε qui impose sa formule [87].

$$d\omega/dt = - d[CH_4]/dt \propto (\varepsilon/k)\ Min([CH_4],[CO_2])$$

Le terme de choix à droite de la formule délimite une zone de réaction qui est une zone de mélange épaisse, là où ni les gaz frais, ni les fumées ne sont trop rares. Le modèle de flamme turbulente de Spalding est connu sous le nom de modèle EBU (Eddy Break-Up).

Retenons que c'est un bienfait de la turbulence d'accélérer la combustion d'un mélange gazeux et de faciliter ainsi la fabrication de corps de chauffe à prémélange compacts et modulants.

Dans certaines chaudières traditionnelles de très forte puissance dites à « foyer borgne », on force les fumées à se mélanger avec les gaz frais et à défaire toute structure de flamme mince en rebroussant chemin au fond de la chambre de combustion. Le foyer est alors qualifié de réacteur parfaitement brassé (Perfectly Stirred Reactor en Anglais).



Soixante ans après Zeldovitch, la conception assistée prend le relai pour établir la cartographie thermique 3D précise d'une chambre de combustion. Toutefois, par rapport à la thermodynamique des fluides classique, les bilans à simuler se sont étoffés.

En **1969**, l'académicien des sciences **Favre (1911-2005)** adapte les cinq premiers bilans au cas des gaz compressibles pour tenir compte des fluctuations de masse volumique qui accompagnent les fortes fluctuations de température de la combustion turbulente. La bonne vieille équation d'état des gaz parfaits donne la relation supplémentaire qui correspond à la variable de densité supplémentaire.

En outre, pour calculer le taux de combustion turbulente de Spalding il faut au minimum deux nouveaux bilans qui sont des bilans d'espèce chimique. Un bilan d'espèce chimique Y est une équation de transport d'une fraction gazeuse [Y] formellement identique à l'équation de transport de la température absolue T dans le bilan de chaleur.

Pour faire bonne mesure on rajoute les pertes par rayonnement des GES qui ne sont pas systématiquement négligeables.

| Bilan ou équation | Champs moyens concernés | Acronyme |
|---|---|---|
| Masse (mélange gazeux) | Vitesse et masse volumique | FANS (*) |
| Qté de mouvement | Vitesse et pression motrice réduite | FANS |
| Energie cinétique turbulente | Energie cinétique turbulente | k-ε |
| Dissipation de la turbulence | Taux de dissipation | k-ε |
| Chaleur | Température | FANS |
| Espèces gaz frais | Concentration [$CH_4$] et/ou autre | FANS |
| Espèces fumées | Concentration [$CO_2$] et/ou autre | FANS |
| Combustion | Taux de réaction | EBU |
| Gaz parfaits | Pression, température, masse volumique | |
| Rayonnement | Brillance, température | ETR |

(*) Favre Averaged Navier Stokes

Hottel aurait dit à ses étudiants : « A case can be made for fire being, next to the life processes, the most complex of phenomena to understand » [(88)].

Ni Zeldovitch, ni Favre, ni Spalding ne lui donnent tort…

*Le rendement de la chaudière est-il le seul enjeu de la combustion ?*

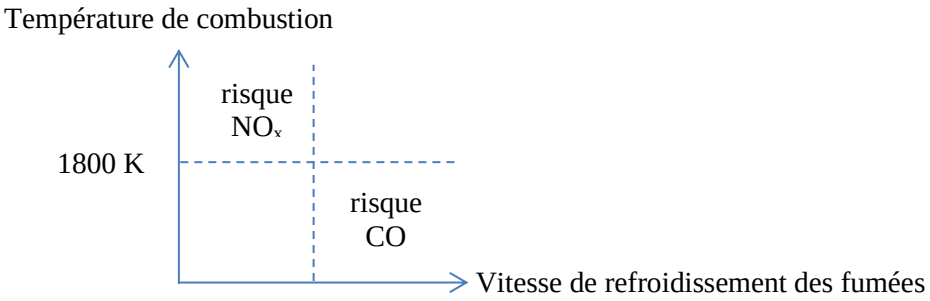
En brûlant, les hydrocarbures produisent des Gaz à Effet de Serre, c'est leur fardeau. Mais la combustion a un côté plus sombre encore, c'est l'émission de polluants nocifs pour la santé humaine (troubles neurologiques et troubles respiratoires) ou pour la santé de la chaudière elle-même (acidité des condensats) ou encore pour l'intégrité de la couche d'ozone.

Dans le cas du gaz naturel, on parle essentiellement du monoxyde de carbone CO et des oxydes d'azote $NO_x$.

Le monoxyde de carbone est responsable d'une centaine de décès par an en France, par empoisonnement de l'hémoglobine du sang. Même avec un prémélange parfaitement stœchiométrique, du CO se forme irrémédiablement dans le front de flamme (la feuille de cigarette) d'un brûleur. Une post combustion plus lente complète l'oxydation du CO en $CO_2$ en aval du front de flamme, du moins tant que la réaction n'est pas arrêtée par un refroidissement trop rapide des fumées. Des tubes d'eau trop proches du brûleur peuvent causer ce genre de déboire.

Zeldovitch, le même qu'avant, est le premier à trouver le mécanisme de formation du monoxyde d'azote NO dans une chambre de combustion. C'est un ensemble de réactions efficaces seulement au-dessus de 1800K (> 1500°C), relativement lentes, et qui se prolongent largement en dehors du front de flamme, du moins si le temps de séjour à haute température se prolonge. Un temps de séjour trop long de l'azote dans le foyer est la raison de l'abandon progressif des foyers borgnes.

CO et $NO_x$ sont les Charybde et Scylla de la combustion du gaz naturel. En évitant l'un on tombe souvent dans l'autre.




La chimie des polluants n'affecte quasiment pas les bilans de l'aérothermochimie. On procède donc en deux temps en commençant par les sept bilans rappelés plus haut. Une fois tous les champs de la combustion « hygiénique » calculés à l'intérieur du foyer, on confie à **Chemkin** le soin d'apprécier le risque d'émission de polluants en tel ou tel point du foyer.

Chemkin est un logiciel de simulation chimique développé dans les **Sandia Labs**, laboratoires officiels du puissant Département de L'Energie américain (DoE).

Au cours des vingt dernières années, les ingénieurs ont inventé le prémélange, la « basse température », la condensation intégrée, le brûleur à géométrie variable, le brûleur radiant… Toutes ces améliorations sont le fruit de bonnes intuitions et de bonnes expérimentations.

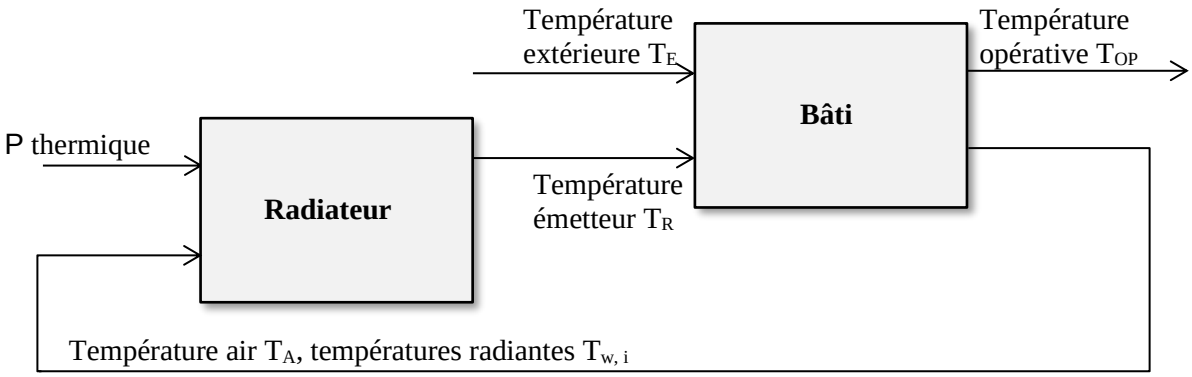
Le défi à lancer aux logiciels d'aérothermochimie des vingt prochaines années, c'est d'être capable de converger, en quelques heures de calcul et pour chaque cahier des charges, vers la chaudière idéale.

A quoi sert toutefois d'avoir la chaudière la plus performante du marché si on ne sait pas répondre à la question déjà posée pour les radiateurs électriques ?

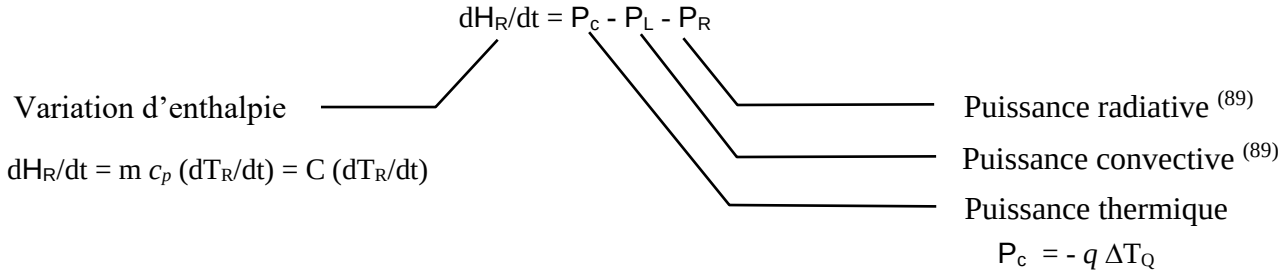
*Quel débit de gaz pour maintenir une température opérative de 20°C dans le local d'habitation ?*

Dans un chauffage central à boucle d'eau, la chaudière ne chauffe pas directement le local. Elle fournit de l'énergie thermique à un circuit hydraulique qui distribue cette énergie à travers des panneaux émetteurs comme le radiateur type 22.

Le radiateur à eau type 22 s'insère dans la maquette numérique à la place du radiateur électrique sans aucun changement. Certains radiateurs électriques ressemblent d'ailleurs à s'y méprendre à des radiateurs à eau. Les caractéristiques dimensionnelles, les proportions de convection et de rayonnement, la gamme de température $T_R$, sont comparables.




Sans surprise, la formule du bloc radiateur à eau est une copie conforme de celle du bloc radiateur électrique, à la puissance injectée près. L'écart entre la puissance thermique injectée et la puissance thermique dégagée (convection et rayonnement) donne le taux de chaleur stockée dans le radiateur.

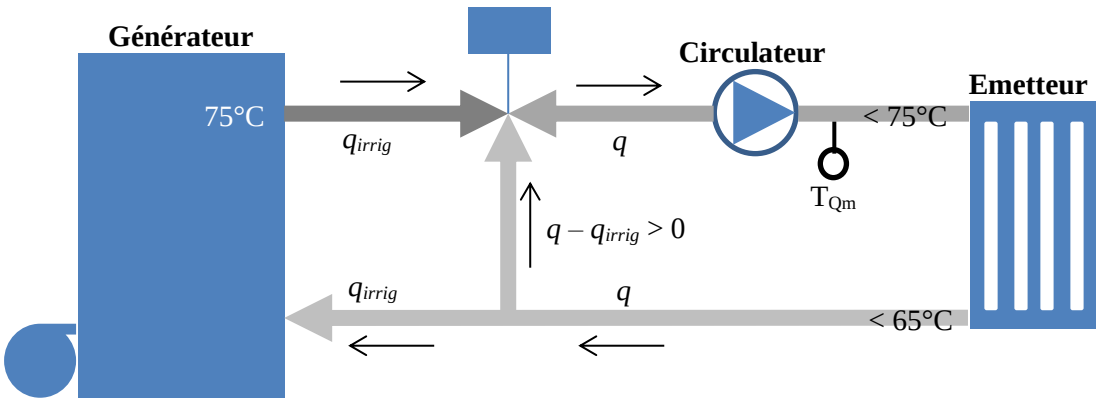



Dans le cas de l'émetteur électrique, l'alimentation en puissance $P_E$ est sans contrainte aucune. Le réseau d'ErDF est une ressource illimitée et le thermostat n'a qu'à régler son taux de cycle pour prendre les watts dont il a besoin sur le secteur.

Dans le cas de l'émetteur hydraulique, la puissance injectée est la combinaison du débit d'eau qui traverse l'émetteur et de la chute de température entre l'entrée et la sortie de l'émetteur. Pour ajuster la puissance injectée, c'est cette combinaison qu'il faut commander.

Dans le véritable zoo des circuits de chauffage central, nous sélectionnons un schéma fréquent.

**Vanne 3 voies servomotorisée**



Un circulateur à vitesse fixe maintient un débit d'eau fixe côté émetteur. Côté chaudière, le débit d'irrigation est variable et la température de départ est maintenue constante. La vanne 3 voies, montée en vanne de mélange, a une « autorité » choisie pour que la perte de charge totale du circuit soit la plus constante possible et que le débit dans le by-pass soit toujours dans le bon sens.

La vanne 3 voies accumule très peu d'eau. Son équation de bloc traduit simplement la conservation des débits de capacité calorifique et d'enthalpie de l'eau de chauffage.

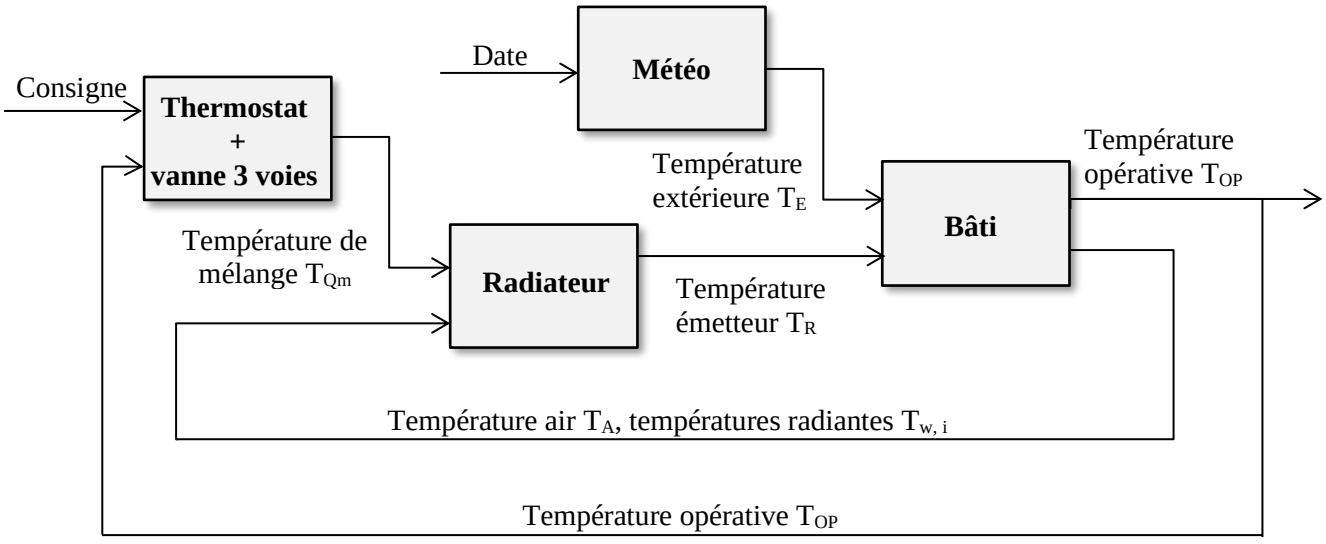
$$q_{irrig} / q = (T_{Qm} - T_{Qre}) / (T_{Qde} - T_{Qre})$$

$T_{Qm}$ température de mélange
$T_{Qde}$ température de départ chaudière
$T_{Qre}$ température de retour

Vanne grande ouverte, toute l'eau de départ chaudière à 75°C traverse l'émetteur et en ressort à 65°C en dégageant une puissance $P_{50}$ si on est dans les conditions du régime 75/65/20 de l'EN 442. C'est le réglage pour un climat extérieur rigoureux.

En fermant progressivement la vanne le débit d'irrigation de la chaudière diminue et une fraction de l'eau de retour vient se mélanger à l'eau de départ pour compenser. A l'entrée de l'émetteur le débit est le même mais la température de mélange $T_{Qm}$ chute à 70°C par exemple. En sortie, la température de retour $T_{Qre}$ chute aussi, mais de moins de 5°C, et la puissance dégagée diminue. C'est la bonne réponse à un adoucissement du climat extérieur.

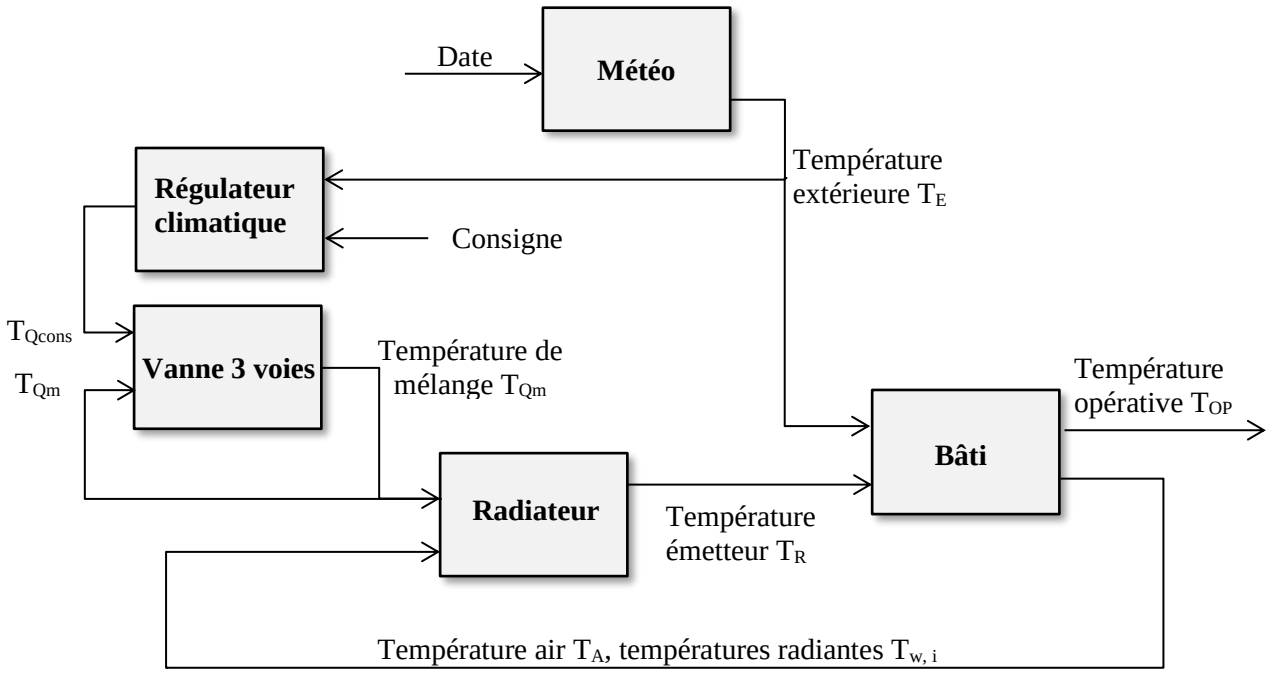
Quand un thermostat d'ambiance associé à une vanne motorisée agit sur la température de mélange en fonction de l'écart mesuré entre la température opérative et la consigne de 20°C, on a une régulation en boucle fermée classique.




Le confort d'une boucle de régulation fermée avec sonde d'ambiance n'est pas garanti car la grandeur réglée, la température de mélange, n'est pas directement celle qui donne un écart à la consigne.

La priorité accordée à la pièce où est située la sonde d'ambiance est un autre inconvénient. Il y a peu de chances que la température de mélange réglée pour le salon orienté plein sud assure le confort suffisant dans les chambres orientées au nord. Multiplier les circuits, les vannes et les sondes n'est pas une solution économiquement raisonnable.

C'est pourquoi, contrairement aux électriciens, les fabricants et installateurs de chauffage central privilégient la régulation en boucle ouverte ou régulation climatique. La bonne température de mélange pour l'ensemble de la maison est affaire de compromis et la température qui réunit tout le monde, c'est la température qu'il fait dehors.




Quel programme installer dans le régulateur climatique ?

La loi de chauffe ou « loi d'eau », relation (90) entre une consigne de température de mélange, la consigne de température d'ambiance et la température extérieure, est plébiscitée par la profession. La loi d'eau n'est pas une caractéristique de la chaudière. C'est une caractéristique du couple bâti et émetteurs de chauffage à laquelle l'installateur doit adapter la chaudière qu'il met en route.

La loi d'eau est aussi une cotte bien mal taillée puisqu'elle utilise un calcul de régime permanent pour corriger des perturbations météorologiques largement instationnaires.

La grandeur réglée, la température de mélange, est mesurée par une sonde thermométrique, ce qui permet de piloter la vanne 3 voies avec un boîtier électronique fonctionnant en boucle fermée.

Qu'on opte pour le thermostat d'ambiance et la boucle fermée ou pour le régulateur climatique et la boucle ouverte, ou encore pour une combinaison des deux, la chaudière n'a qu'une seule mission, maintenir une température d'eau de départ suffisante et constante.

Pour cette mission et avec un brûleur tout ou rien, le régulateur le plus simple est l'aquastat que nous avons déjà croisé en parlant du ballon électrique et de la norme EN 60379. Si le volume d'eau d'irrigation est trop petit, ce choix n'est pas possible. Soit la variation de température est de trop grande amplitude, soit la fréquence des coupures du brûleur est trop importante.

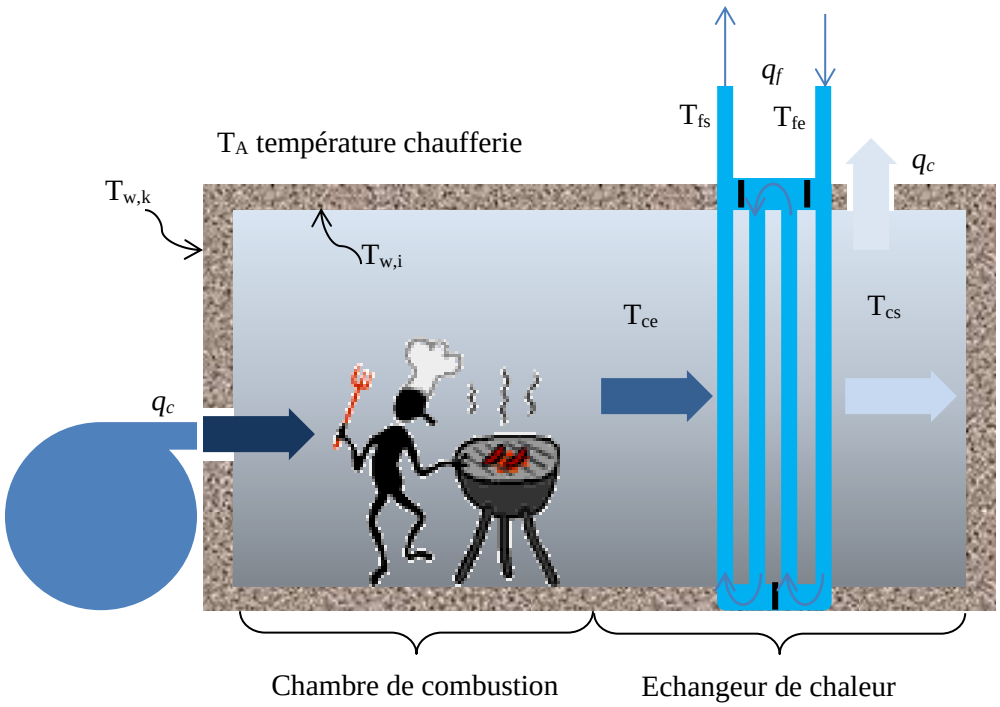
Dans les deux cas, le spectre du monoxyde de carbone rôde.

Avec un brûleur modulant, un aquastat électronique à action proportionnelle (ou mieux), monté en boucle fermée sur l'alimentation en prémélange, fait l'affaire.

Peut-on imaginer un aquastat électronique en boucle ouverte ?

Après ce qu'on a expliqué des sept bilans de Favre et de l'hygiène de combustion, la solution paraît futuriste. Le modèle d'un bloc de régulation n'a toutefois pas besoin d'être aussi rigoureux qu'un modèle de conception assistée.

Une enveloppe isolante délimitant un volume aéraulique chauffé et équipé d'une entrée et d'une sortie VMC est le schéma familier du local d'habitation. Remplaçons l'air par du prémélange, ajoutons un brûleur et un compartiment de type échangeur de chaleur gaz/eau à courant croisé, et nous avons la maquette d'une chaudière.




Si on utilise les indices chaud (c), froid (f), entrée (e), sortie (s) des échangeurs compacts, un glossaire des températures et des débits de capacité calorifique s'impose.

| Température et débit | Notation | Relation | Gamme (hors TBT) |
|---|---|---|---|
| Fumées chaudes | $T_{ce}$ | ≤ température de combustion | 800°C – 1500°C |
| Fumées froides | $T_{cs}$ | | 40°C - 200°C |
| Eau de retour | $T_{fe}$ | $T_{fe} = T_{Qre}$ | 30°C – 60°C |
| Eau de départ | $T_{fs}$ | $T_{fs} = T_{Qde} > T_{Qm}$ | 60°C – 90°C |
| Ambiance chaufferie | $T_A$ | = température du prémélange | 20°C – 30°C |
| Débit des fumées | $q_c$ | = débit du prémélange | pour 25 kW<br>15 W/°C ou 11 g/s ou 10 l/s |
| Débit d'irrigation | $q_f$ | = $q_{irrig}$ | pour 25 kW et 75/65/20<br>2500 W/°C ou 0.6 l/s |

Pour une chaudière au gaz naturel de 25 kW le débit de gaz est d'environ un demi-gramme par seconde (0.6 litres par seconde) et le débit de prémélange est de 10 litres par seconde pour un excès d'air inférieur à 20%.

Simultanément, le débit d'eau d'irrigation à plein régime 75/65/20 est de 0.6 litres par seconde.

Comme pour le local d'habitation, on donne en annexe A2 le tableau des sous-systèmes et des équations qu'un moteur de calcul moderne doit résoudre, dans le cas d'une chambre de combustion parfaitement brassée.

Si les parois non irriguées de la chambre de combustion (plaques de fond) sont de petite taille et bien isolées thermiquement, on peut appliquer un modèle de combustion adiabatique où tout le pouvoir calorifique du gaz naturel sert exclusivement à chauffer les fumées, y compris un excès d'air x de l'ordre de 10 à 20%. Cela revient à ignorer l'enveloppe de la chaudière dans le bilan thermique.

En oubliant le terme qui dépend du temps, on calcule [91] une température de combustion maximum, qu'on attribue aux fumées brassées dans la chambre de combustion.

$$T_{ce} = T_A + (PCI/c_p)\, Y$$

Température de combustion — Fraction massique gaz nat.

$$Y = 1/(1 + 17.2\,(1 + x))$$

Pour une température de chaufferie ($T_A$) de 20°C, un pouvoir calorifique (PCI) du gaz naturel de 50000 kJ/kg, une chaleur massique de gaz chauds ($c_p$) de 1.4 kJ/kg/°C et un excès d'air x = 0.2, la température de combustion est de 1670 °C. A cause des déperditions inévitables et de l'influence de l'échangeur, la température de foyer est toujours inférieure à 1500°C, ce qui est en outre recommandé pour éviter la formation des $NO_x$.

Pour compléter le modèle simplifié de la maquette de chaudière, il est temps de se remémorer Kays et London et leur méthode universelle de description des échangeurs de chaleur compacts.

Quand on combine [92]

- la méthode NUT de Kays et London,
- la combustion adiabatique,
- l'équation de la vanne 3 voies,
- la loi d'eau,
- une température de départ chaudière constante et un débit de circulateur constant,

la fonction de Kays et London $\varepsilon = f(NTU, Cr)$ se mue en une fonction $q_c = F(x, T_E)$ reliant le débit de capacité calorifique du prémélange à l'excès d'air qu'il contient et à la température qu'il fait dehors.

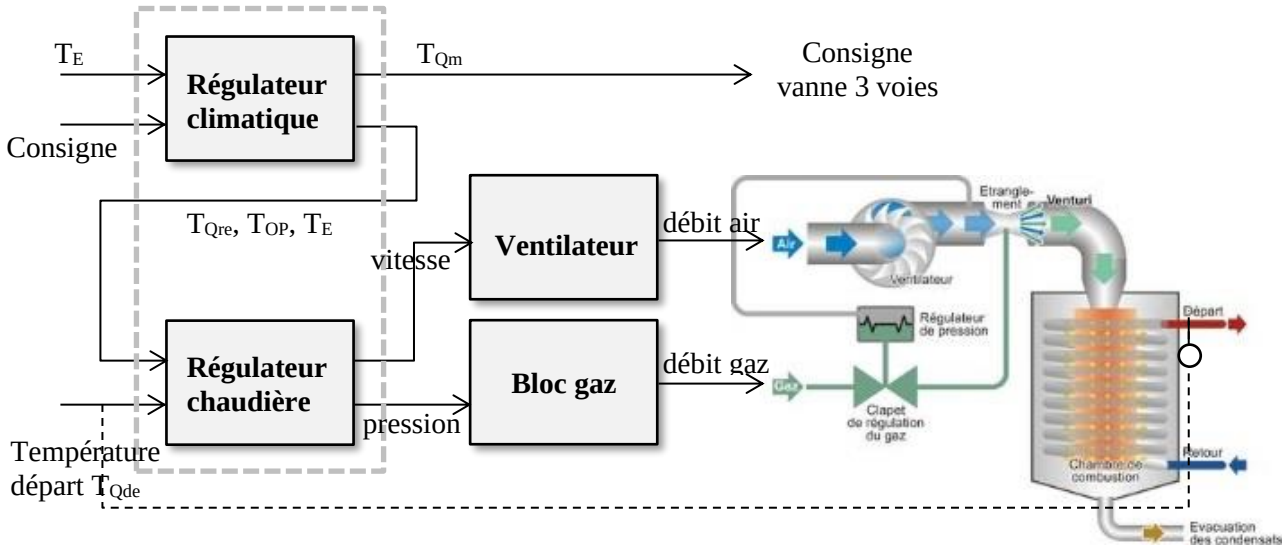
*Quel débit de gaz pour maintenir une température opérative de 20°C dans le local d'habitation ?*

On est au bout de nos peines. Si on sait piloter l'excès d'air, le débit de capacité calorifique du prémélange impose le débit de gaz naturel. En outre, la formule de Kays et London donne la clé du rendement global de la chaudière.

$$\eta = P_u/P_b = \text{Puissance de chauffage / Puissance de combustion} = \varepsilon\,(1 - o)$$

$\varepsilon$ est l'efficacité de l'échangeur de chaleur, o est une quantité sans dimension, nettement plus petite que l'unité et en rapport avec l'écart des températures les plus basses des fluides en jeu, gaz de combustion et eau de chauffage.

Il ne reste plus qu'à introduire un zeste de relaxation pour tenir compte des régimes transitoires de la chaudière, du circuit de chauffage et du bâti et on tient un modèle de régulation en boucle ouverte très convenable.



## Connexion…

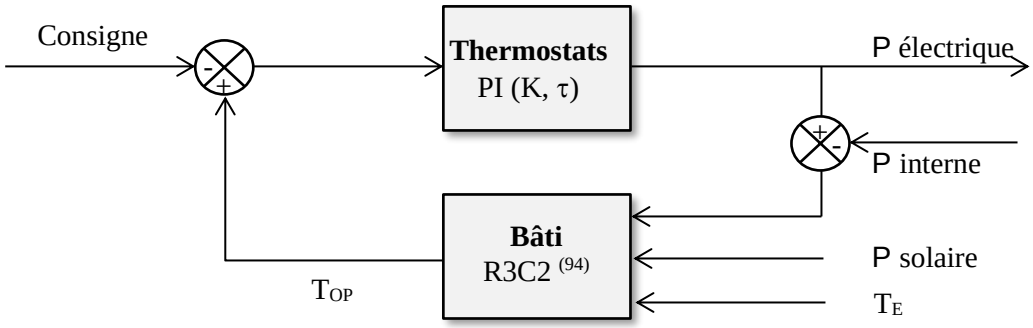
Information de dernière minute…

La régulation climatique en boucle ouverte fait confiance à la physique. Elle exige néanmoins la connaissance de paramètres individuels comme le Ubât du logement, les $P_{50}$ et les pentes des émetteurs, le pouvoir calorifique du gaz…Sans parler de toutes les constantes de temps à identifier pour traiter les perturbations temporaires de la météo, de l'occupation des locaux, de la stratégie de ventilation…

Autant dire qu'il est difficile de trouver le bon réglage du premier coup, si jamais le bon réglage existe !

Tout le monde connaît la technique de régression linéaire pour identifier un modèle de données simple. Au début des années 1980 on a commencé de constituer des banques de données de logements et de reporter graphiquement des nuages de points de consommations mensuelles de chauffage en fonction des températures extérieures. On appelle « signature énergétique du bâtiment » la belle droite descendante généralement obtenue.

Beaucoup plus récemment [93], EDF a cautionné des études de charge de chauffage électrique au pas de temps de 5 minutes pour identifier un système global, bâti, émetteurs et thermostats comme ci-dessous.




Les automaticiens appellent identification paramétrique la technique qui consiste à estimer les paramètres inconnus des blocs bâti et thermostats, à partir d'enregistrements des télé-compteurs d'ErDF.

Aujourd'hui, l'Internet et les objets Web connectés révolutionnent cette approche et promettent de reconnaître des signatures d'autant plus précisément que

- chaque appareil (radiateur, chaudière, VMC…) peut fournir une fiche technique à l'ouverture du compte Internet et transmettre les mesures de tous ses capteurs,
- les plates-formes de service peuvent communiquer avec les serveurs météo pour mesurer des températures, des ensoleillements, des vitesses de vent, des hygrométries,
- les usagers peuvent accepter de donner des informations a priori sur leur logement, leur composition familiale, leurs rythmes de vie, leurs exigences de confort, leurs équipements ménagers…

Pourquoi, dans ces conditions, ne pas confier la régulation du système de chauffage au « cloud » ?

C'est sans doute l'avenir, à condition de laisser un mode dégradé dans le logement, en cas de défaillance du réseau ou des serveurs. En outre, avant de passer la main au cloud, il faut s'assurer qu'il a parfaitement deviné la nature des régulateurs installés dans le logement et qu'il est capable de les surpasser. Dans la transition, un mode « auto-école » avec double commande reste à inventer !

Nous voilà à la fin d'une excursion scientifique qui nous a conduits d'un petit cube de cuivre au « cloud » informatique, d'une statistique à une autre en somme. N'en doutons pas, l'Internet des objets, avec ses $3.4\ 10^{38}$ adresses IPv6 possibles, s'il voit le jour, aura ses lois, différentes de celles prévues par les constructeurs.

Quels enseignements tirer de ce périple ?

Tout d'abord, rien ne semble devoir résister à la passion des chercheurs, ni l'électricité, ni l'eau, ni le feu. Néanmoins, assez curieusement, les lois établies pour les gaz de particules microscopiques, les molécules, les électrons, les phonons, les photons, sont plus convaincantes que les lois établies pour les gaz et les liquides aux échelles des tuyaux, des pompes, des brûleurs ou des radiateurs.

La faute en revient principalement à la turbulence, qui, même très assiégée par les théoriciens, reste une énigme.

Le mathématicien britannique **Sir Horace Lamb (1849 – 1934)** dit dans un discours « I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic » [(95)].

La compagnie américaine ANSYS réalise, avec son logiciel phare FLUENT, une synthèse magistrale des connaissances en mécanique et thermique des fluides, y incluses les théories de la turbulence les plus récentes et même celles de l'aérothermochimie.

Ce sont les ingénieurs de l'aéronautique, puis ceux de l'automobile, qui, dans l'industrie, ont démarré la simulation 3D des écoulements et des transferts thermiques. C'est maintenant l'heure du génie climatique, motivé par les enjeux énergétiques et environnementaux. L'utilisation de FLUENT ou d'un logiciel concurrent est bien à l'ordre du jour pour optimiser un corps de chauffe de chaudière collective par exemple.

Fort bien, mais n'y a-t-il pas encore mieux à faire ?

Le texte qui précède est parsemé de diagrammes de blocs tels que les électroniciens et les automaticiens les ont inventés il y a près de 50 ans. Chaque bloc, ou boîte plus ou moins blanche, est une abstraction d'un radiateur, d'une chaudière, d'un ballon, d'un caisson VMC, d'un régulateur, d'un bâtiment, voire de la météo. Les équations à poser pour chaque bloc sont une forme de moyenne globalisante des équations de la simulation 3D. Correctement reliés entre eux, les blocs donnent naissance à un système d'équations capable de simuler l'évolution dans le temps du système complet, chauffage central, ventilation, bâti et météo, par exemple.

Les logiciels de création, d'assemblage des blocs, et de résolution des équations existent. C'est une compagnie américaine, THE MATHWORKS, avec son logiciel phare au nom évocateur, SIMULINK, qui détient, là encore, le leadership.

Le moteur de recherche de Google nous fournit une étude de notoriété contestable, mais imbattable en prix, à partir des résultats d'une requête combinant deux expressions clés.

| Clés | Résultats |
|---|---|
| « simulink » + « aerospace industry » | 30 700 |
| « simulink » + « automotive industry » | 86 700 |
| « simulink » + « electronics industry » | 85 000 |
| **« simulink » + « hvac industry »** | **10 700** |
| « model-based design » + « aerospace industry » | 13 800 |
| « model-based design » + « automotive industry » | 31 200 |
| « model-based design » + « electronics industry » | 47 700 |
| **« model-based design » + « hvac industry »** | **3 430** |

A l'appui de cette statistique, notons que le grade universitaire qui, dans le monde entier, couvre les disciplines visitées par cet exposé, c'est le doctorat en génie mécanique, le PhD in mechanical engineering ! C'est logique pour le turboréacteur ou le moteur diésel, c'est encore concevable pour la pompe à chaleur, mais c'est franchement décalé pour le radiateur électrique.

On reproduit en annexe A3 l'analogie électrique R5C qui constitue le cœur du moteur de calcul réglementaire de la RT2012. Quelle allégeance des architectes aux électroniciens !

Pourquoi la filière du génie climatique boude-t-elle autant les pratiques modernes de conception et de dimensionnement des systèmes ?

Il n'y a pas qu'une raison. Toutefois, l'éclatement de la filière entre industriels, bureaux d'études, installateurs, organismes scientifiques et réglementaires du secteur public, avec leurs intérêts et leurs statuts parfois divergents, ne facilite pas l'adoption d'une technique collaborative par essence.

Parmi les événements susceptibles de bousculer la filière dans les prochaines années, tout le monde retient les objets connectés et le cloud qui va progressivement prendre la main sur les régulateurs domestiques et négocier des règles de confort directement avec les usagers.

Quand il y a tant à gagner à promouvoir le calcul moderne pour le diagnostic et le dimensionnement des installations, c'est un peu dommage. Le cloud avant la physique, c'est la charrue avant les bœufs, le sensationnel avant le rigoureux, la relation client avant la qualité produit.

A moins que tout ne soit mis en mouvement en même temps…

L'effet Google+Nest peut brutalement mettre le génie climatique sous les feux de la rampe. Or tout le monde est attiré par la lumière, même les physiciens et les automaticiens qui se demanderont pourquoi ils ne se sont pas passionnés plus tôt pour le génie climatique.

N'y voyez rien de personnel…

## Précision…

[1] La mécanique quantique indique qu'un électron (presque) libre, piégé dans un cube de cristal conducteur, ne peut exister que dans un mode cinétique caractérisé par un vecteur **n** à trois composantes orthogonales entières, ($n_x$, $n_y$, $n_z$). L'énergie E(**n**) de l'électron libre est proportionnelle au carré de **n**. Parce que ce sont des fermions de spin s = ±½ , le principe d'exclusion de Pauli précise que deux électrons libres au plus peuvent partager le même mode cinétique **n** ou encore qu'il ne peut y avoir qu'un électron au plus dans le mode complet (**n**,s).

[2] <G> est un nombre réel, la mesure de la grandeur physique. G est une observable, un opérateur linéaire hermitien tenant lieu, en mécanique quantique de grandeur mesurable. L'opérateur densité de probabilité ρ est hermitien, de trace unité (Tr ρ = 1). Il est fabriqué avec l'ensemble supposé dénombrable des modes « purs » du cube de cuivre $|\psi_n>$ et une suite de poids positifs $P_n < 1$ tels que $\sum P_n = 1$. Un mode pur $|\psi_n>$ est le gaz des 8.45 $10^{22}$ électrons de Fermi, chacun dans un mode **n**,s différent, de façon indiscernable. Dans le formalisme de la mécanique quantique, $\rho = \sum P_n |\psi_n><\psi_n|$.

[3] Les mathématiciens savent définir l'exponentielle d'un opérateur comme une série de puissances de cet opérateur. Z = Tr exp(- βH) est la fonction de partition du système, un coefficient de normalisation réel, positif, sans dimension.

[4] La formule entraîne que l'opérateur densité ne dépend pas explicitement du temps, un prérequis pour décrire une situation d'équilibre.
Lorsque deux systèmes de la même classe d'équivalence sont sans interaction notable, l'énergie des deux est le cumul des énergies et la loi de probabilité des deux est le produit des lois de probabilité.

[5] Les taux d'occupation moyens $<N_i>$ se calculent comme dérivées partielles du logarithme de la fonction de partition Z qui se calcule elle-même à partir des énergies des modes cinétiques (et autres) et de la combinatoire autorisée pour les particules. Les particules sont indiscernables ou discernables (quantiques ou classiques), soumises ou non à l'exclusion de Pauli (fermions ou bosons), en nombre fixe ou variable (population conservative ou non conservative).
Tous calculs faits, $U_e$ = cste + g($E_F$) $\beta^{-2}$, $E_F$ énergie de Fermi du cuivre.

[6] Par définition la chaleur massique ou capacité thermique massique d'un solide de masse m et d'énergie U vaut $c_p$ = (1/m) (dU/dT).
La masse molaire du cuivre (masse de 6 $10^{23}$ atomes de cuivre) est M = 63.5 g.mol$^{-1}$. La chaleur massique du cuivre est $c_p$ = 386 J.kg$^{-1}$.K$^{-1}$ et la chaleur spécifique molaire $c_v$ = 24.3 J.mol$^{-1}$.K$^{-1}$. La loi de Dulong et Petit donne $c_v$ = 3R = 25 J.mol$^{-1}$.K$^{-1}$ et le produit M$c_p$ = 24.5 J.mol$^{-1}$.K$^{-1}$.

[7] Il y a en fait trois termes de correction de $U_e$ + $U_v$, les collisions électrons-phonons, les collisions électrons-électrons et les collisions phonons-phonons.

[8] A la pression atmosphérique et 0°C, 29 kg d'air soit 6022 $10^{23}$ molécules occupent 22.4 m$^3$ (24.5 m$^3$ à 25°C).

[9] U = (5/2) N$k_B$T = (5/2) nRT, R constante des gaz parfaits, n nombre de moles de gaz. L'énergie interne d'un gaz parfait est purement cinétique et ne dépend pas des distances intermoléculaires. Elle dépend du nombre de molécules mais pas du volume.

[10] Pour les gaz parfaits diatomiques, l = p et $C_v$ = (5/2) nR

[11] Les grandeurs extensives (volume, énergie, nombre de molécules…) s'ajoutent lorsqu'on superpose deux systèmes en équilibre thermique et chimique. Les grandeurs intensives (température, pression, potentiel chimique) ne s'ajoutent pas, elles s'équilibrent.

[12] La chaleur reçue $\int_\gamma q = Q$ n'est pas une fonction d'état car, si la transformation réversible $\gamma$ est un cycle, Q n'est pas nulle. En revanche $\int_\gamma (q/T)$ est toujours nulle le long d'un cycle et dS est une différentielle exacte (théorème de Green-Ostrogradski).

[13] A nombre de particules fixe, la fonction de partition $Z = Tr \exp(- \beta H)$ est une fonction explicite de la température T (dans $\beta$) et une fonction implicite du volume V (dans H par le truchement du potentiel d'interaction de Van der Waals). $U = <H> = (Tr \exp(- \beta H)H)/Z$ est aussi une fonction de T et V et, tous calculs faits, $U = - \partial LogZ/\partial\beta = F - T\partial F/\partial T$. En posant $S = - \partial F/\partial T$, on trouve la définition classique de l'énergie libre $F = U – TS$.

[14] L'énergie libre F, mesurée en joules, est un potentiel thermodynamique, c'est-à-dire que toutes les grandeurs extensives et intensives, en dehors du volume et de la température du système, sont déduites des dérivées partielles de F. L'entropie est simplement la dérivée de F par rapport à la température, avec le signe moins.

[15] L'énergie totale n'est pas vraiment palpable mais elle est toujours mesurable grâce au bilan de chaleur et de travail reçus, conformément au premier principe de la thermodynamique.

[16] Si logiquement on mesure la température en joules alors la constante de Boltzmann n'est qu'un facteur d'échelle sans dimension et S mesure une quantité sans dimension comme un nombre de combinaisons.

[17] Problème : trouver l'opérateur $\rho$ qui maximise $- Tr \rho Log \rho$ sous la contrainte $U = <H> = Tr \rho H$. Solution : $\rho = \exp(- \beta H)/Z$.

[18] Valable aussi pour les solides et leurs « gaz » de porteurs de chaleur (électrons, phonons). Dans le cas du ballon stratifié de 200L, le domaine hydrodynamique est une tranche d'eau horizontale (~1mm d'épaisseur) à la hauteur z. L'équilibre local permet de donner une température T(z, t) à n'importe quelle tranche. La température du ballon est un champ unidimensionnel.

[19] Cedric **Villani**, Séminaire Poincaré XIV, (Ir)réversibilité et entropie.

[20] Quand $g(\mathbf{x})$ est une quantité par unité de volume au point $\mathbf{x}$, $\nabla g$ est un vecteur (dimension $\mathbf{\Gamma L^{-4}}$ où $\mathbf{\Gamma}$ est la dimension de la grandeur physique diffusée G). $K = (1/3)<v> l$ est le coefficient scalaire de diffusion du modèle de collision à section efficace. <v> est la vitesse balistique moyenne et l est le libre parcours moyen. K est donc de dimension $\mathbf{L^2T^{-1}}$ et le micro-courant $\mathbf{J_G}$ est en général un vecteur, de dimension $\mathbf{\Gamma L^{-2}T^{-1}}$. Le flux de micro-courant est un débit, quantité de G par seconde, de dimension $\mathbf{\Gamma T^{-1}}$.

[21] Inégalité de Clausius-Duhem simplifiée : $2\mu \|D\|^2 + (1/T) \lambda \|\nabla T\|^2 \geq 0$
$\nabla T$ est le vecteur (dimension 3) gradient de température de composantes $\partial T/\partial x_j$. $\|\nabla T\|^2$ est la somme des carrés des 3 composantes du vecteur. $\|\nabla T\| = 0$ implique T = cte, température uniforme.
D est le tenseur symétrique (ordre 2, dimension 3) des vitesses de déformation. Il est fabriqué à partir des dérivées $\partial V_i/\partial x_j$ du champ de vitesse de transport $\mathbf{V}$. $\|D\|^2$ est la somme des carrés des 9 composantes du tenseur. $\|D\| = 0$ implique un champ de vitesse nul, c'est-à-dire un arrêt de l'écoulement, à cause de la condition de non glissement au contact des parois.
Quand on coupe le chauffage du ballon d'eau chaude, c'est la viscosité qui arrête les courants de convection, au prix d'un dégagement de chaleur supplémentaire (quasi imperceptible).

[22] CFD, codes de calcul numérique en mécanique des fluides et thermique, dont le code le plus populaire est le FLUENT de l'éditeur américain ANSYS.

[23] Un fluide newtonien est un fluide pour lequel le tenseur des extra contraintes (6 composantes indépendantes) est proportionnel au tenseur des vitesses de déformation, $\sigma' = 2\mu D$. La puissance des contraintes visqueuses est $2\mu ||D||^2$, comme dans Clausius-Duhem.

[24] On ajoute $-\beta\mathbf{g}(T - T_\infty)$ à la pression motrice, $\beta$ est la dilatabilité isobare en $°K^{-1}$.

[25] A gauche, l'opérateur de dérivée par rapport au temps (souvent noté D()/Dt pour marquer la différence avec la dérivée ordinaire) s'appelle indifféremment dérivée totale, dérivée particulaire ou dérivée convective. Il est la somme de la dérivée partielle $\partial()/\partial t$ et de la dérivée composée $\mathbf{V}.\nabla()$ (règle de la chaîne appliquée aux coordonnées $\mathbf{x}(t)$). Dans le bilan de quantité de mouvement, la dérivée composée $\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}$ provoque un véritable casse-tête mathématique parce que les équations différentielles ne sont plus linéaires.

[26] La diffusivité thermique est le coefficient $\alpha = \lambda/(\rho c_p)$ qui caractérise la capacité d'un matériau au repos à transmettre une variation de température. Elle vaut $1.4\ 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$ pour l'eau à 25 °C et $1.2\ 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$ pour l'acier.

[27] Le nombre de Grashof est le nombre sans dimension qui caractérise l'équilibre entre la force d'Archimède et le frottement visqueux, donc la convection libre, dans le fluide.

[28] Le nombre de Prandtl est le nombre sans dimension qui mesure le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide. Il caractérise la sensibilité des régimes thermiques aux régimes hydrauliques. Il vaut 7 pour l'eau à 20°C.

[29] A condition que le « brise jet » soit finement conçu…

[30] 1.73 kWh/24h pour un chauffe-eau ACI Visio d'Atlantic.

[31] $\rho c_p(\partial T/\partial t) = \lambda\Delta T$ équation aux dérivées partielles linéaire parabolique. La solution est relativement simple à trouver dès que le problème est « bien posé » (conditions initiales, conditions aux limites).

[32] Le Ubât des maisons expérimentales Castor & Pollux est de $0.43\ W.K^{-1}.m^{-2}$. Le U d'un mur extérieur est typiquement $0.3\ W.K^{-1}.m^{-2}$.

[33] $P_m = \rho g Q\ \Delta H_Q$, Q débit en mètre cube par seconde, $\rho g Q$ débit en Newton par seconde.

[34] $P_c = \rho c_p Q\ \Delta T_Q$, Q débit en mètre cube par seconde, $\rho c_p Q$ débit en Watt par degré.

[35] Clay Mathematics Institute, Millenium Prize Problems. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

[36] Nombre sans dimension $Re = VD\rho/\mu$ où V est la vitesse de débit et D le diamètre du conduit. Dans la majorité des applications de génie climatique, $10^4 < Re < 10^6$.

[37] Le tenseur des contraintes de Reynolds, tenseur symétrique à 6 coefficients (produits $V'_iV'_j$) indépendants $R = - \rho \langle \mathbf{V'} \otimes \mathbf{V'} \rangle$.

[38] Rappel formule de Gibbs $\langle G \rangle = (1/Z)\ Tr\ exp(- \beta H)G$

[39] La cascade de Richardson-Kolmogorov est avérée en aval d'une grille de soufflerie comme représentée sur la photographie à gauche. Elle est mise en défaut dans la conduite coudée à droite.

[40] Hypothèse de Boussinesq : 2 scalaires à déterminer, $\langle k \rangle$ et $\mu_T$.
$R = - (2/3) \rho \langle k \rangle 1 + 2 \mu_T \langle D \rangle$, D tenseur des vitesses moyennes de déformation.

[41] La pression motrice réduite est la pression motrice divisée par la masse volumique $P^* = p/\rho + gz$.
La pression motrice réduite a la dimension d'une vitesse au carré.

[42] Viscosité turbulente
$\mu_T/\rho = 0.09 \langle k \rangle^2/\varepsilon$, viscosité cinématique turbulente >> viscosité cinématique moléculaire.
Unités : $\langle k \rangle$ en $m^2.s^{-2}$ ou $J.kg^{-1}$, $\varepsilon$ en $W.kg^{-1}$, $\nu_T$ en $m^2.s^{-1}$.

[43] D diamètre du conduit circulaire, V vitesse de débit définie comme Q/A, Q débit en $m^3/s$ et A aire de la section transversale du tuyau en $m^2$.

- Ecoulement laminaire coefficient de Fanning $C_f = 16/Re$
- Ecoulement turbulent, corrélation de Colebrook, $1/\sqrt{\lambda} = - 2 \log_{10} (e/(3.71\ D) + 2.51/(Re \sqrt{\lambda}))$, $\lambda$ coefficient de Darcy vaut 4 $C_f$ pour une conduite circulaire, e hauteur moyenne des aspérités de la conduite.

[44] Moyenne de $\varepsilon$ dans une section transversale de conduite = $C_f\ V^3/R$

[45] Dans le cas d'un chauffe-eau uniquement !

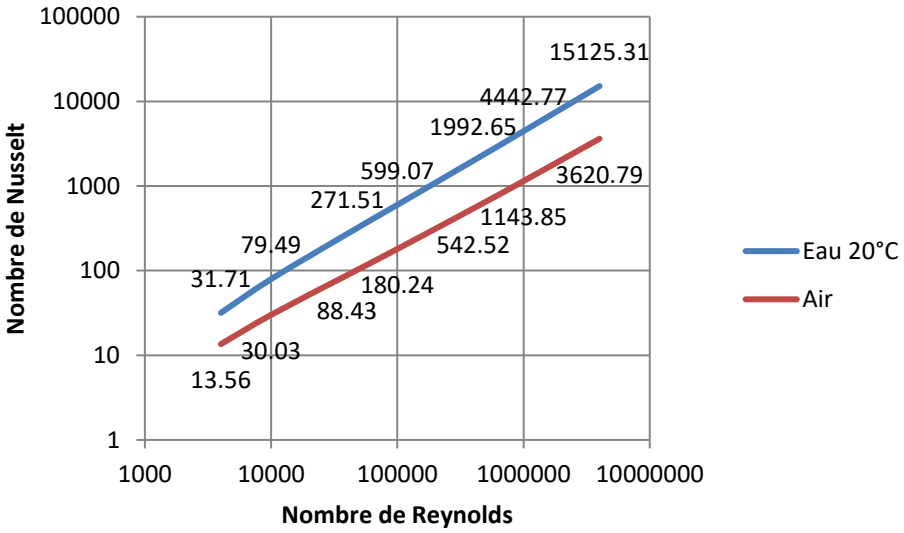
[46] Débit de température à travers cette section divisé par le débit en volume.

[47] Les deux nombres de Prandtl sont égaux à l'unité, $Pr = Pr_T = 1$. Pour $Pr \neq 1$, $C_f \cong 2StPr$.

[48] Section transversale $A = \pi D^2/4$, surface d'échange $S = \pi DL$, $St = h/(\rho c_p V)$
$P_c = \rho c_p Q\ \Delta T_Q$
$\Delta T_Q = - 4\ St\ \Delta\Theta\ (L/D)$
$P_c = 4\ \rho c_p VA\ St\Delta\Theta(L/D) = 4\ h\ A\ (L/D)\ \Delta\Theta = h\ S\ \Delta\Theta$

[49] $St = h/(\rho c_p V) = Nu\ \lambda/(\rho c_p VD) = Nu\ (\lambda/(\mu c_p))(\mu/(\rho VD) = Nu/(RePr)$
Analogie de Reynolds complète $Pr = 1$, $St = ½\ C_f$

[50] Corrélation de Petukhov-Gnielinski




[51] Au début du XXIe siècle, cette mécanique n'est toujours pas entièrement comprise. L'approche moderne attribue un rôle crucial aux tourbillons qui se forment au bord de fuite d'une aile.

[52] Contrairement aux apparences la formule est homogène car la constante est en $W.K^{-1}.m^{-7/4}$

[53] L'analyse dimensionnelle prédit Nu = f(Re,Pr), Re = VD/ν, Pr = ν/α. Donc le Nusselt dépend de ν et de α, à moins qu'il ne dépende que de α. Par ailleurs h = Nu (λ/D) donc h dépend en plus de la conductibilité λ. Comme $\alpha = \lambda/(\rho c_p)$, h dépend de ν, λ et $\rho c_p$.

[54] $Gr = g\beta\Delta\Theta L^3/\nu^2$, L longueur caractéristique, β dilatabilité isobare (1/T pour les gaz), g accélération de la pesanteur 9.81 $m/s^2$.

[55] $P_c = \rho c_p Q \Delta T = 4.18 \times (12/60) \times 30 = 25$

[56]
$\Delta\Theta_0 \neq \Delta\Theta_1$, $LMTD = (\Delta\Theta_0 - \Delta\Theta_1)/(Log\Delta\Theta_0 - Log\Delta\Theta_1)$ avec $\Delta\Theta_0 = T_{ce} - T_{fs}$ et $\Delta\Theta_1 = T_{cs} - T_{fe}$
$\Delta\Theta_0 = \Delta\Theta_1$, $LMTD = \Delta\Theta_0 = \Delta\Theta_1$, seul cas où P est effectivement proportionnelle à A.

[57]

- Effectiveness ε, rapport entre le courant de chaleur constaté et un courant de chaleur hypothétique, toujours inférieur à un. Le cas hypothétique est le cas idéal où l'eau de chauffage à la sortie du circuit primaire ne peut plus transmettre la moindre calorie à l'eau du réseau [57-1], à l'entrée du circuit secondaire. Dans le cas d'un échangeur à contrecourant dont le débit de capacité calorifique le plus petit est le débit chaud :

$$\varepsilon = (T_{ce} - T_{cs})/(T_{ce} - T_{fe})$$

- Heat Capacity Ratio Cr, rapport entre le débit de capacité calorifique le plus petit et le débit de capacité calorifique le plus grand, toujours inférieur à un. Dans le cas d'un échangeur à contrecourant dont le débit de capacité calorifique le plus petit est le débit chaud :

$$Cr = (T_{fs} - T_{fe})/(T_{ce} - T_{cs})$$

- Number of Transfer Units NTU, rapport entre le courant de chaleur unitaire des tubes ou des plaques et le débit de capacité calorifique le plus petit [57-2], compris entre zéro et six. Comme son nom l'indique, cette variable technique n'a pas d'interprétation bien convaincante…

$$NTU = (T_{ce} - T_{cs})/LMTD$$

[57-1] Echangeur virtuel à contrecourant, dont la surface de contact est infinie, ou encore dont le « pincement » est réduit à zéro.
[57-2] NTU = $AU/q_c$ si $q_c < q_f$

[58] a et b constantes positives, abscisse dans le sens de l'écoulement, Q en $m^3/s$, $\Delta H_Q$ en mètres. Formule de friction de Fanning (à droite du signe égal) plus terme d'inertie mécanique (à gauche du signe égal) pour tenir compte d'une variation de débit dans le temps.

[59] $H = \iiint \rho c_p T dv$ en joules, $q = \rho c_p Q$ en W/°C, Q en $m^3/s$, $\Delta T_Q = T_{sortie} - T_{entrée}$ en °C, P en watts. Terme capacitif (à gauche du signe égal) pour tenir compte d'une variation dans le temps de la température moyenne de l'eau du tuyau

[60] En toute rigueur un bloc est une transposition du composant réel dans des espaces de variables et de fonctions (complexes) engendrés par la transformation de Laplace.

[61] A la diffusion longitudinale près.

[62] Pas plus sinon la formule en volumes est fausse et il faut raisonner en masses.

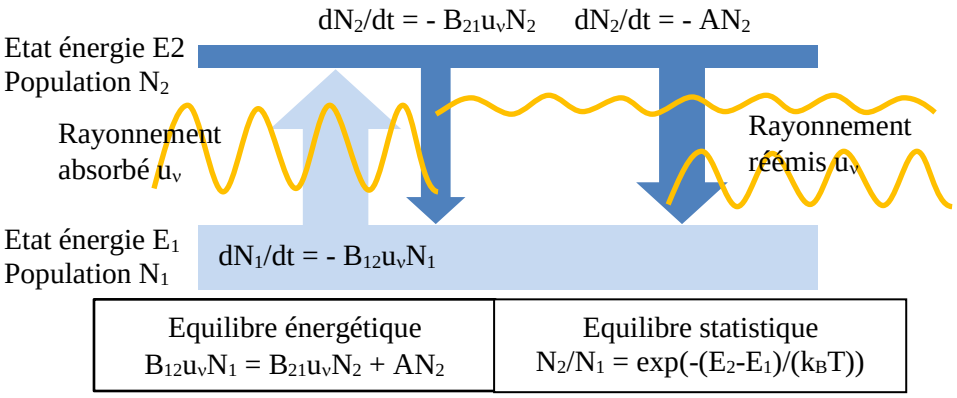
[63] Diana déesse étrusque de l'obscurité, Lucifer, fils, frère et amant de Diana !

[64] La fréquence d'une onde est la même chose que sa pulsation au facteur 2π près, $\omega = 2\pi\nu$. La fréquence a une dimension inverse d'un temps, son unité est le hertz (Hz). Le quantum d'énergie s'exprime indifféremment avec ν ou ω, $E = h\nu = \hbar\omega$. La relation de dispersion du vide est aussi une relation entre une longueur d'onde et une fréquence, $\lambda\nu = c$. La formule de Planck est souvent écrite et représentée graphiquement en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ.

[65] Une « seconde » quantification s'impose à **Dirac**, **Fock** et les autres une dizaine d'années après l'équation de **Schrödinger (1922)**, pour étendre les vertus de cette équation à une multiplicité de corpuscules quantiques de même nature.

[66] Aux basses fréquences $\beta h\nu << 1$, branche de Raleigh-Jeans, aux hautes fréquences, $\beta h\nu >> 1$, branche de Wien. Aux fréquences les plus basses la longueur d'onde est du même ordre que la taille de la cavité.

[67] Coefficients d'Einstein




[68] Les Français lui doivent la projection Lambert des cartes de l'Institut Géographique National.

[69] Le stéradian sr est l'unité d'angle solide Ω, grandeur sans dimension dont l'élément différentiel dΩ permet d'intégrer une fonction comme $I_\nu$, définie sur une sphère autour d'un point d'espace.

[70] Onde plane monochromatique et vecteur de **Poynting**.

[71] Le courant total reçu par le vitrage diminue avec la distance radiateur-fenêtre parce que l'angle solide sous lequel chaque élément de vitrage voit la façade du radiateur diminue avec cette distance.

[72] Corps noir se dit black body en Anglais, d'où le choix $B_\nu(T)$ pour l'intensité spécifique de Planck. Kirchoff connaissait la loi phénoménologique mais bien sûr il ignorait et l'explication et l'auteur…

[73] La proportion de rayonnement augmente quand la température frontale baisse…mais pas tant qu'on veut bien le dire.

[74] Formules établies au chapitre sur la norme EN 442.

[75] y compris « au détail » par tranche de longueur d'onde et d'angle d'incidence.

[76] FDRB, fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle pour les fanas.

[77] Le calcul est simple dans le cas des plans parallèles. Dans le cas de l'enceinte, c'est un vrai casse-tête.

[78] La plupart des moteurs de calcul thermique se contentent de couches juxtaposées dans le sens de l'épaisseur reproduisant de fait la structure d'un mur composite.

[79] La diffusivité des matériaux de construction courants varie seulement de 1 à 4 au-dessus de $2\ 10^{-7}$ $m^2/s$.

[80] Prudence donc quand on évoque l'inertie thermique d'un bâtiment. Les règles Th-I de la réglementation française RT2012 n'apportent qu'un surcroît de confusion.

[81]

| Appareil 2000W | Convecteur | Rayonnant | Aluminium | Fonte | Fluide |
|---|---|---|---|---|---|
| Temps caractéristique (sec) | 60 | 300 | 750 | 2000 | 3000 |

[82] Th-BCE RT2012
Les puissances radiative et convective sont évaluées forfaitairement à 30% et 70% de la puissance dégagée par un émetteur mural, quel que soit son type, électrique ou hydraulique.

Dans le formulaire Th-BCE 2012, la puissance à injecter est égale à la puissance dégagée. C'est une fonction linéaire $P_E = a_0 + a_1 \theta_{sd}$ de la température vue par la sonde de l'émetteur qui est à peu près la température opérative $\theta_{sd} \cong T_{OP}$.
$a_0$ et $a_1$ sont les coefficients de la « droite de comportement thermique du groupe (bâti) ». $a_0$ et $a_1$ sont calculés à chaque pas de temps d'une heure pour tenir compte de la masse du bâti et du déphasage entre courants de chaleur et températures.

La qualité du thermostat et l'inertie du corps de chauffe sont amalgamés dans un terme de « variation temporelle de l'émetteur ».
La variation temporelle de l'émetteur implique un complément $\delta P_E = a_1 \delta\theta$.
$\delta\theta$ vaut 1.8°C par défaut pour les convecteurs ou bien 1.44 CA où CA est le coefficient d'aptitude de l'appareil certifié par le LCIE.

[83] Le spectre d'émission-absorption d'un gaz n'est pas continu comme celui d'un solide. C'est une juxtaposition de raies étroites. Néanmoins le mécanisme d'Einstein et la distribution de Planck s'appliquent aussi aux gaz.

[84] Facteur expliqué par la théorie de la section efficace.

[85] Le $c_p$ des gaz chauds est en moyenne de 1.4 kJ/kg/°K quelle que soit la composition.
290g × 1.4 J/g/°K × 2000 °K = 812 kJ
En pratique la température de 2300K n'est jamais atteinte. On s'arrange pour ne pas dépasser 1800K (1527 °C) notamment en « refroidissant » la flamme avec un excès d'air. Par ailleurs la vitesse de réaction n'est jamais infinie et la combustion ne peut pas être strictement adiabatique.

[86] Corrélations pour un prémélange stœchiométrique de gaz naturel.
En fonction de la température des gaz frais $S_L$ (cm/s) = $10 + 3.7\ 10^{-4}\ T^2$
En fonction de la pression (en atm) $S_L$ (cm/s) = $43 / \sqrt{P}$
Pour P = 1 atm et T = 300K, $S_L$ = 43 cm/s

[87] k en joules par kilogramme et ε en watts par kilogramme, donc k/ε a la dimension d'un temps.

[88] « On peut plaider que le feu est le plus complexe des phénomènes à comprendre, juste après les processus biologiques ».

[89] On rappelle qu'une approximation de la puissance émise $P_L + P_R$ est donnée par la formule du $P_{50}$ de la norme EN 442.

[90] Loi d'eau

| | Cadre normatif | Courant de chaleur |
|---|---|---|
| Loi de déperdition du local | RT | $P = (\sum A)Ubât\ (T_{OP} - T_E) = L\ (T_{OP} - T_E)$ |
| Loi d'émission des émetteurs | EN 442 | $P = KS\ (½\ (T_{Qm} + T_{Qre}) - T_{OP})^n$ |
| Régime permanent radiateur | EN 442 | $P = q\ (T_{Qm} - T_{Qre})$ |

Loi d'eau, relation entre $T_{Qm}$ (mélange), $T_{OP}$ (ambiance) et $T_E$ (extérieure) :
$T_{Qm} = T_{OP} + (L(T_{OP} - T_E)/(KS))^{1/n} + ½\ L(T_{OP} - T_E)/q$
$T_{Qre} = T_{OP} + (L(T_{OP} - T_E)/(KS))^{1/n} - ½\ L(T_{OP} - T_E)/q$
$T_{Qm} - T_{Qre} = L(T_{OP} - T_E)/q$

[91] $dH/dt = - q_c(T_{ce} - T_A) + P_c = - \rho c_p Q(T_{ce} - T_A) + \rho QY\ (PCI) = 0$, $\rho Q$ débit prémélange en kg/s

| | $CH_4$ + | Air → | Fumées + | h | Y |
|---|---|---|---|---|---|
| Stœchiométrie | 16 kg | 275 kg | 291 kg | 800000 kJ | 16/291 = 1/18.2 |
| Prémélange | 16 | 275 (1 + x) | 16 + 275 (1 + x) | 800000 kJ | 16/(16 + 275 (1 + x)) |

[92]

| | | Formules | Paramètres |
|---|---|---|---|
| Efficacité | ε | $= (q_f/q_c)\ (T_{fs} - T_{fe})/(T_{ce} - T_{fe})$ | |
| Nbre Unités de Transfert | NTU | $= AU/q_c$ | AU |
| Rapport de déséquilibre | Cr | $= q_c/q_f$ | |
| Méthode NUT | | $\varepsilon = f(NTU, Cr)$ | |
| Combustion adiabatique | | $T_{ce} = T_{OP} + (PCI/c_p)\ Y = T_{OP} + \theta Y$ | $PCI/c_p$, $T_{OP}$ |
| Vanne 3 voies | | $q_f/q = (T_{Qm} - T_{Qre})/(T_{fs} - T_{fe})$<br>$\varepsilon = (q/q_c)(T_{Qm} - T_{Qre})/(T_{ce} - T_{fe})$<br>$T_{ce} - T_{fe} = \theta Y\ (1 + (T_{OP} - T_{Qre})/\theta Y)$ | $q$ |
| Loi d'eau | | $q(T_{Qm} - T_{Qre}) = L(T_{OP} - T_E)$<br>$T_{Qre} = T_{OP} + (L(T_{OP} - T_E)/(KS))^{1/n} - ½\ L(T_{OP} - T_E)/q$<br>$q_{irrig} = q_f = L(T_{OP} - T_E)/(T_{Qde} - T_{Qre})$ | L, KS, n<br>$T_{Qde}$ |
| Bilan de puissance | | $q_c\ \theta Y\ \varepsilon = L(T_{OP} - T_E)/(1 + (T_{OP} - T_{Qre})/\theta Y)$<br>$T_{Qre}$ fonction de $T_E$ => $q_f$ fonctions de $T_E$<br>$q_c$ fonction de $T_E$ et Y donc fonction de $T_E$ et x<br>$q_c\ \theta Y$ = puissance de la combustion = $P_b$<br>$L(T_{OP} - T_E)$ = puissance de chauffage = $P_u$ | |

[93] Voir par exemple, Thèse de Doctorat ParisTech de Chadia Zayane, 11 janvier 2011

[94] Analogie électrique à 3 résistances et 2 capacités. En RT2012, on utilise plutôt R5C.

[95] « Je suis un vieil homme maintenant, et quand je mourrai et irai au paradis il y a deux sujets sur lesquels j'aimerais être éclairé. L'un est l'électrodynamique quantique et l'autre l'écoulement turbulent des fluides. Et à propos du premier je suis plutôt optimiste ».

Annexe A1 : modèle thermique de bâti, air intérieur et enveloppe.

1. Sous-système : **air intérieur (parfaitement brassé)**

EDO enthalpie : $dH_A/dt$ = courant de chaleur entrant - courant de chaleur sortant

Schéma numérique : Euler et suivants

| **Courant de chaleur** | **Températures en jeu** | **Formulation** | **h ($W.m^{-2}.K^{-1}$)** |
|---|---|---|---|
| Entrée air frais | Air extérieur $T_E$ | $qT_E$ | |
| Sortie air ambiant | Air ambiant $T_A$ | $-qT_A$ | |
| Convection radiateur | | cf bloc spécialisé | |
| Convection parois internes | Air ambiant $T_A$<br>$\sum$Faces $T_{w,i}$ | Newton | $0.7 < h_L < 5.0$ |

2. Sous-système : **enveloppe**

Dans la masse de l'enveloppe, EDP Fourier: $\partial T/\partial t = \alpha \Delta T$

Aux frontières de l'enveloppe, $\lambda \partial T/\partial n \propto$ courant de chaleur

Schéma numérique : maillage 3D et FEM dynamique

| **Courant de chaleur** | **Températures en jeu** | **Formulation** | **h ($W.m^{-2}.K^{-1}$)** |
|---|---|---|---|
| Convection parois internes (pour chaque face…) | Air ambiant $T_A$<br>Face $T_{w,i}$ | Newton | $0.7 < h_L < 5.0$ |
| Rayonnement parois internes (pour chaque face…) | Face $T_{w,i}$ $\sum$Faces $T_{w,j}$ | Radiosité | $h_R$ = 5.1 (à 20°C) |
| Convection parois externes (pour chaque face…) | Air extérieur $T_E$<br>Face $T_{w,k}$ | Newton | $h_L = 4 + 4v$<br>v : anémométrie |
| Rayonnement parois externes (pour chaque face…) | Air extérieur $T_E$<br>Face $T_{w,k}$ | Stefan-Boltzmann | $h_R$ = 4.2 (à 0°C) |

Annexe A2 : modèle thermique de chaudière, gaz, enveloppe et échangeur.

1. Sous-système : **gaz chambre de combustion (parfaitement brassée)**

$dH_c/dt$ = courant de chaleur entrant - courant de chaleur sortant + combustion

$q_c$ débit de capacité calorifique des gaz, e excès d'air

| **Courant ou production de chaleur** | **Températures en jeu** | **Formulation** |
|---|---|---|
| Entrée gaz frais | Air intérieur chaufferie $T_A$ | $q_cT_A$ |
| Sortie fumées chaudes | Fumées chaudes $T_{ce}$ | $-q_cT_{ce}$ |
| Combustion | | $P_c=(q_c/c_p)PCI/(1+17.2(1+x))$ |
| Convection + rayonnement parois internes | Fumées chaudes $T_{ce}$<br>$\sum$Faces $T_{w,i}$ | Newton<br>Stefan-Boltzmann |

2. Sous-système : **enveloppe chambre de combustion**

Equation de Fourier avec conditions aux parois

| **Courant de chaleur** | **Températures en jeu** | **Formulation** |
|---|---|---|
| Convection + rayonnement parois internes (pour chaque face…) | Fumées chaudes $T_{ce}$<br>Face $T_{w,i}$ | Newton<br>Stefan-Boltzmann |
| Convection +rayonnement parois externes (pour chaque face…) | Air intérieur chaufferie $T_A$<br>Face $T_{w,k}$ | Newton<br>Stefan-Boltzmann |

3. Sous-système : **échangeur de chaleur gaz/eau**

Méthode NUT de Kays et London instationnaire

| **Courant de chaleur** | **Températures en jeu** | |
|---|---|---|
| Convection + rayonnement | $T_{ce}$, $T_{cs}$, $T_{fe}$, $T_{fs}$ | $\varepsilon$ = f (NTU, Cr) |

Annexe A3 : modèle R5C méthode Th-BCE 2012.

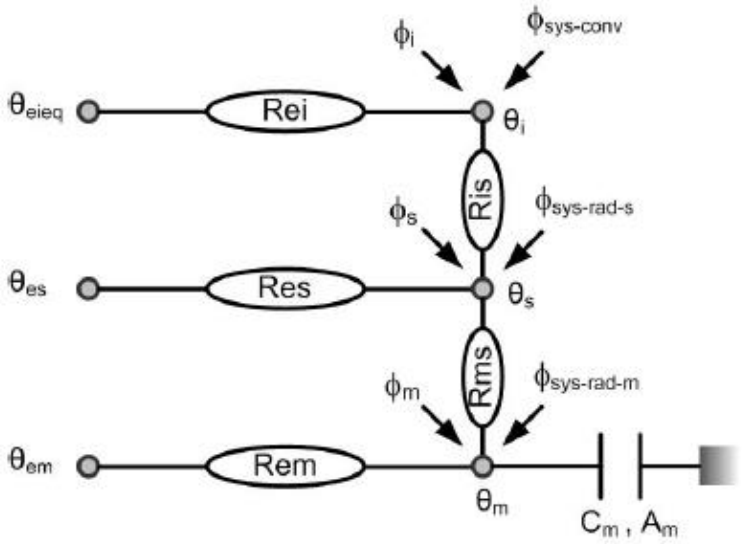



**Figure 61 : Schéma RC du modèle de comportement thermique d'un groupe**